

# 最近の教材事情 Ver. 6

2023.11.25  
北海道士別翔雲高等学校  
吉田 奏介

## ■はじめに

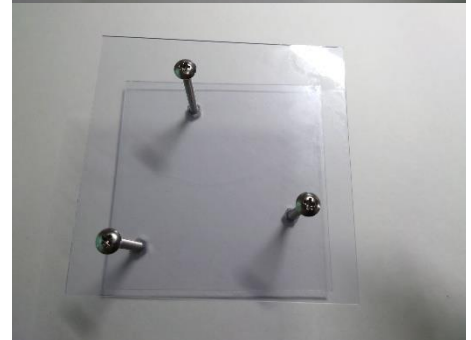
中学生体験入学の中で体験授業があり、2年ぶりに担当となりました。そこで何をしようかなと考えていたところ、Newton2023.9月号に最小面積問題として「石鹸膜は最小面積を「計算」することができる」というタイトルの内容を見つけました。シャボン膜の話は前にも見たことがあり興味あったので、今回はシャボン膜に関する教材を作って体験授業をやってみたという話です。

## ○まずは平面におけるシュタイナー木用の教具作成

材料：アクリル板（透明、300mm×300mm×1mm）、ネジ（M4×40mm）、  
アクリル板を100mm×100mmにカットして、必要枚数（今回は三角形用の模型を5個、四角形用の模型を5個作るの10枚ずつ）を束ねます。穴を空ける位置に印をつけ電動ドリルで一気に穴を開け、ネジ止めしたら完成です。

アクリル板を厚くするとカットしたり穴開けしたりするのが大変ですが、強度等を考えると1mmは欲しいところです。

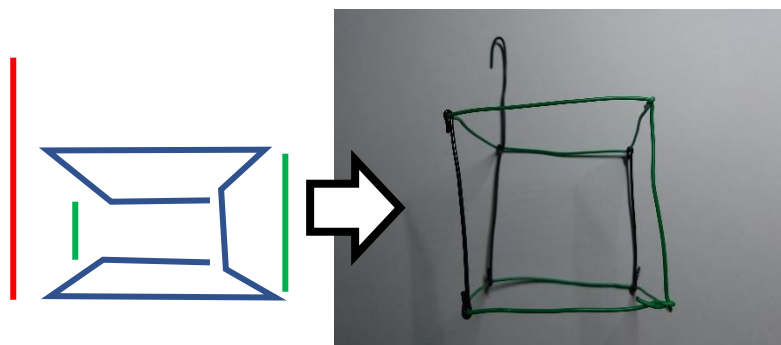
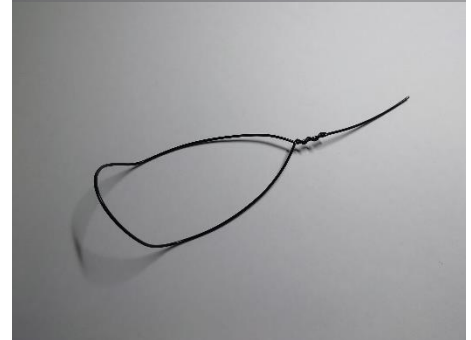
もう少し細いネジを使った方が、加工がしやすくシャボン膜もきれいにできやすいかもしれません。



## ○立体におけるシュタイナー木用の教具作成

材料：針金（径1.6mm）

なるべく一筆書きのように針金を巡らせます。連結部分は多少雑でもあまり問題はないと思います。三角錐や閉曲面も作っておきます。



## ○シャボン液の調整

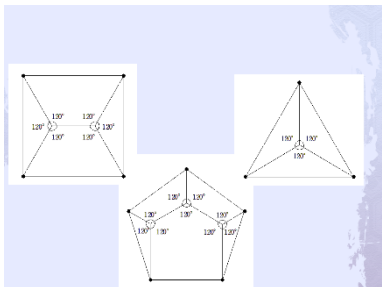
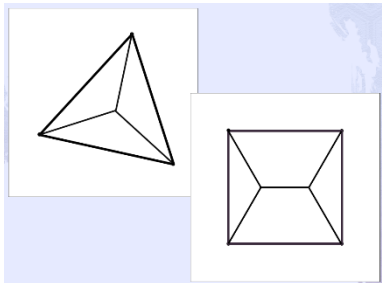
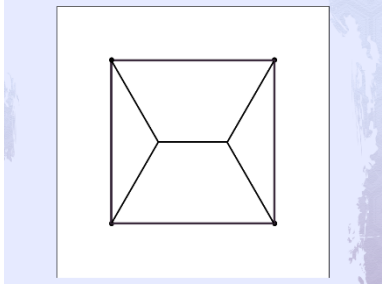
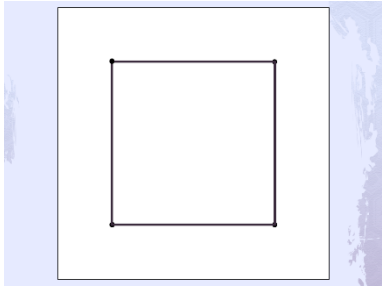
材料：水 3000cc、中性洗剤 200cc、洗濯のり 200cc（それぞれ紙コップ1杯分）

バケツに教具が浸る分の水の量は用意しなければいけないので3リットル以上必要となりました。さらにある程度の強度がある方が良さだろうと思い、過去に生徒がシャボン玉くぐりを学校祭で企画したことがあったので、そのときのデータを遡り、「界面活性剤の濃度が、35%~40%以上の中性洗剤を使用する。PVA（ポリビニルアルコール）の洗濯糊を入れると良い。」ということで最終的には上のような分量としました。また、当時は精製水を用いたり、ガムシロップを入れたりしましたが、今回はそこまではしませんでした。



## ○体験授業のおおまかな流れ

		学習内容・活動（時間）・指導上の留意点
本時の展開		<ul style="list-style-type: none"> <li>・アイスブレイクとしてB5用紙でネームプレート作成</li> </ul>
		<ul style="list-style-type: none"> <li>・ワークシート①配付。</li> <li>・（問題提起）「土別・ニセコ・広尾の各都市から等距離かつ最短距離の箇所に工場を作りたいと思います。あなたならどこに作るでしょうか？（交通機関や立地などの条件は考えないものとします）」</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「そこで一度地図の情報を削除して、シンプルな図にしてみましょう。それでは、各グループで話し合って各頂点から最短距離となる点を探してみてください。」</li> <li>・個人で考察</li> <li>・グループで考察</li> <li>・グループ間で共有</li> </ul>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>・ワークシート②配付。</li> <li>・実際に教具を使って実験検証。 「シャボン膜が教えてくれた最短距離は右の図のようになります。実際に測って自分達のグループの予想した距離と比較してみましょう。」</li> </ul>	



**シュタイナー点 (stainer point)**  
 平面上の三点を最短の直線で繋ぐ中心の点



ヤコブ・シュタイナー  
 Jakob Steiner  
 1796年 - 1863  
 スイスの数学者

**代表的なシュタイナー木**

・シャボン膜を張った教具をプリントに重ねたり、定規で測ってみたいする。

・「それでは次の問題です。今度は正方形の中に各頂点からの距離が最短となる経路を探してみてください。」

・個人で考察

・グループで考察

・グループ間で共有

・「シャボン膜が教えてくれた最短距離は右の図のようになります。実際に測って自分達のグループの予想した距離と比較してみましょう。」

・実際に教具を使って実験検証。

・シャボン膜を張った教具をプリントに重ねたり、定規で測ってみたいする。

・ワークシート③配付。

・「さらに先ほどの三角形（正三角形）のときの経路と比較して、共通点がないか探してみてください。」

・途中で分度器を配付。

・「シャボン膜は表面張力により一番効率がよい形（面積が小さい形）になるように膜を張ろうとします。」

・ワークシート④配付。

・「面上の三点を最短の直線で繋ぐ中心の点のことをシュタイナー点(stainer point)といい、任意の三角形の外側にかいた正三角形の外接円の交点をフェルマー点 (Fermat Point) と呼びます。フェルマー点が三角形の内部にあるときシュタイナー点と一致することが分かっています。」

シャボン膜が教えてくれた最短距離は右の図のようになります。実際に測って自分達のグループの予想した距離と比較してみましょう。

さらに先ほどの三角形（正三角形）のときの経路と比較して、共通点がないか探してみてください。

シャボン膜が教えてくれた最短距離は右の図のようになります。実際に測って自分達のグループの予想した距離と比較してみましょう。

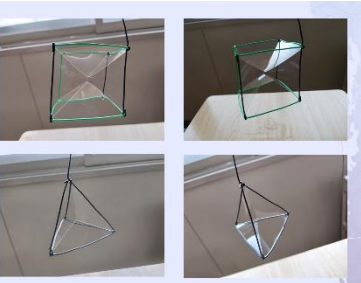
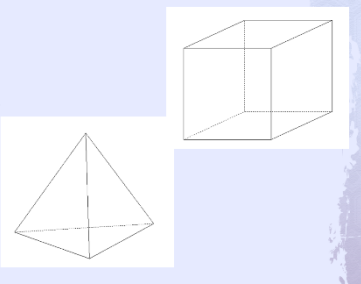
さらに先ほどの三角形（正三角形）のときの経路と比較して、共通点がないか探してみてください。



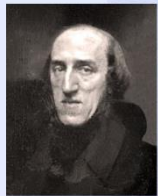

フェルマー点 (Fermat Point) と呼びます。フェルマー点が三角形の内部にあるときシュタイナー点と一致することが分かっています。

1. 観察力	10. 発表力
2. 思考力	11. 創造力
3. 表現力	12. 協働力
4. 読解力	13. 計画力
5. 批判力	14. 実行力
6. 想像力	15. 調整力
7. 傾聴力	16. 柔軟力
8. 観察力	17. 観察力
9. 観察力	18. 観察力

シュタイナー木問題  
グラフ理論の中で、いくつかの点を連結させるときに使う線分の長さの和が最小になるような方法を求める問題



プラトーの問題  
閉曲線（端がつながっている閉じた曲線）を与えて、これを境界にもつ極小曲面を求める問題



ジョゼフ・アントワーン・フェルディナン・プラトー  
Joseph Antoine Ferdinand Plateau  
1801年 - 1883年  
ベルギーの物理学者

### 終わりに

問題にどのように取り組むか、どのように解決すればよいか、糸口を得る着目点として、次のようなものがあげられます。これらのどれかを、または複合的に活用することで問題の解決を目指すことができます。

- |                |                   |
|----------------|-------------------|
| 1. 分類・整理しよう    | 9. 特定の条件に注目しよう    |
| 2. 図や表にしよう     | 10. 視点を変えよう       |
| 3. 簡単な模型を作ろう   | 11. 逆に考えてみよう      |
| 4. 規準をそろえよう    | 12. 操作は一つずつ片付けよう  |
| 5. 数学の言葉で表そう   | 13. 知っている事実を活用しよう |
| 6. 小さな例で試してみよう | 14. 規則性を探そう       |
| 7. 難しい問題は分割しよう | 15. 対応をつけて考えよう    |
| 8. 必要条件でしぼり込もう | 16. 自然からヒントを得よう   |

### 終わりに

◆ 数学を学ぶ上で必要な力は？



頭を使うことで、労働量を減らす

・「また、このような各点を結ぶ最短の距離を考えることを、数学的に「グラフ理論」といいます。グラフ理論の中でいくつかの点を連結させるときに使う線分の長さの和が最小になるような方法を求める問題を、「シュタイナー木問題」と言います。」

・「例えば、点たちを「都市」、連結させるときに使う線分を「道路」と考えると、いくつかの都市を結ぶ最短の道路網を構成する問題になります。例えば、1つの点を発電所、残りの点たちを「家」、連結させるときに使う線分を「電線」に見立てると、使う電線の長さ最小で家々に電気を配給する問題になります（電柱は何本使っても構いません）。このように、どこに施設を作るかなどへの活用などに活用されています。」

・「では、立体のときはどうなるでしょう？」

・「これについて研究した人が居ます。ベルギーの物理学者 J. A. プラトー (J. A. Plateau 1801-1883) という人は1873年に閉曲線（端がつながっている閉じた曲線）を与えてこれを境界にもつ極小曲面を求める問題を、与えられた曲線を針金で作って、これを表面張力の小さい液体のなかに浸してから取り出すと、針金に張られた薄膜は極小曲面の模型となることを示しました。この実験にちなんでプラトーの問題といわれるようになりました。」

・「実際にプラトーのように実験をしてみても確かめてみましょう。（立方体、三角錐（正四面体）、時間があれば自分で閉曲面を作って確かめてみましょう）」

・実際に教具を使って実験検証。

・（まとめ）

・「問題にどのように取り組むか、どのように解決すればよいか、糸口を得る着目点として、次のようなものがあげられます。これらのどれかを、または複合的に活用することで問題の解決を目指すことができます。」

・「今回は自然からヒントを得て問題の解決を目指すことができましたね。」



## ○生徒の様子

三角形（正三角形）のときは角の二等分線を折って交点を探す生徒が多く、結果としてその点と答えが一致するので答えを導いた生徒も多かった。

次に正方形を考えてもらったが、先に正三角形を考えたこともあり、対角線の交点と答える生徒がほとんどであった（そうなるように進めているところもあるが）。そこでシャボン膜で実験すると想定しない形が出ることに驚き、実測してさらに驚くといった展開であった。

立体については予想するのが難しそうであったので早めに実験に移って確認してもらったが、こちらについても特に立方体からできる形についてはかなり想像から離れたものであったのか興味深く観察している様子であった。

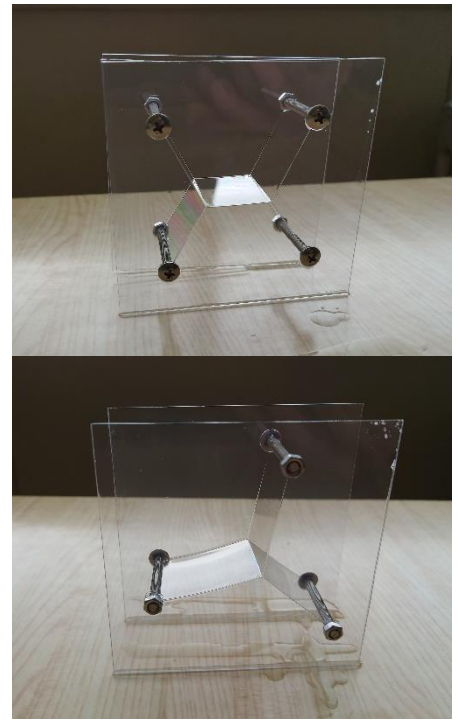


### 【体験した生徒のコメント】

- ・高校の数学で得るものの一つ自然からヒントを得るのわかりやすい説明や動作手順の説明がとてもわかりやすかった
- ・知らない人との交流ができたし最短ルートの求め方を知ることができてたのしかった
- ・グループでの話し合いがあると難しい内容でも考えがまとまるのでうれしかった
- ・シャボン玉で最短距離を求められるのは知らなかった。実験をして考察するのは面白かった。
- ・シャボン玉という身近なものから数学を学べるのはすごいと思った。また、話し合いながら考えるのが楽しかったです
- ・三角形、四角形などの図形の同じ距離を探すのが想像と違いすぎて驚いた
- ・身の回りにあるものが数学に使われていることがわかった。数学をする上での考え方がわかって面白かった。
- ・シャボン膜を使うと点と点の最短距離がわかるということに驚いた。
- ・面白い授業だった
- ・問題を解くとき、シャボン膜を使ってヒントを得ることができたのが楽しかったです。先生の説明もとても分かりやすかったです。
- ・シャボン膜を活用して平面図形や立体図形の最短距離を求められることができると知り、とても驚きました。最後に教えてくださった数学に必要なのは計算力だけでなく、忍耐力、想像力も必要ということがとても納得できました。
- ・シャボン膜の自然な力で計算をせず求めることができるということを学び、数学の新しい発見をすることができた。
- ・実際にシャボン玉のかたちを作って、最短距離を目で見ることができたので、わかりやすかったし、たのしかったです。
- ・自分たちで実際に体験して答えを知ったり、シャボン液で作ったりできてわかりやすかったし、楽しかった。

## ■終わりに

体験授業ということで普通の授業の枠からはみ出た内容を扱えるということもあり行うことができた授業であった感が否めないが、実験によって自然界から答えの糸口を得ることができることや、それを理論化し深く研究した人がいたという数学史について、さらにそれが現在の生活に活用されているということなど、盛り込めるだけ盛り込んでみた（やりたいことをやってみた）授業ができたのは個人的にも面白いものであった（高校生を相手にするのであれば補助線やベクトルを用いて点を求めるところまで進めてもよいと思われるが）。ICTもよいが、手で触れ、肌で感じるのはアナログの教具の良さかなと改めて感じる事となった。



## ○参考資料

Newton 2023.9月号, p. 38-39, 2023年9月7日発行, 株式会社ニュートンプレス

大原洋平, 藤井雄介, 松本浩佑, 佐治健太郎. シャボン膜の性質を数学的に考察する教材の提案. 岐阜数学教育研究. 2011, Vol. 10, p. 98-105

小磯深幸. シャボン玉とシャボン膜にひそむ数学. 数学通信第22巻第4号. 2018, p. 36-51