

○極形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r = |z| [> 0]$$

θ を z の偏角といい $\arg z$ で表す

○積と商の極形式

$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ とすると

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

○複素数の乗法と回転

複素数平面上で、 $P(z)$ とするとき

点 $r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot z$ は

点 P を

原点 O を中心として角 θ だけ回転し

OP を r 倍に拡大 (縮小) した点である

○ド・モアブルの定理

$n \in \mathbb{Z}$ とするとき

$$\left(\cos \theta + i \sin \theta\right)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

※ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta \times n}$ から “累乗は掛け算に”

アブラーム・ド・モアブル

Abraham de Moivre

1667年5月26日～1754年11月27日



○方程式の表す図形

異なる2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対して

■ 方程式 $|z - \alpha| = |z - \beta|$ を満たす点 $P(z)$ 全体

⇒ 線分 AB の垂直二等分線

■ 方程式 $|z - \alpha| = r$ ($r > 0$) を満たす点 $P(z)$ 全体

⇒ 点 α を中心とする半径 r の円

※ 最終手段 → $z = x + yi$, $\alpha = a + bi$ の利用

○半直線のなす角、線分の平行・垂直などの条件

異なる4点を $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$

偏角 θ を $-\pi < \theta \leq \pi$ で考えるとする。

■ $\angle\beta\alpha\gamma = \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$, $\angle\text{BAC} = \left| \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \right|$

■ 3点 A,B,C が一直線上 $\Leftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数 [偏角が $0, \pi$]

■ $AB \perp AC \Leftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数 [偏角が $\pm\frac{\pi}{2}$]

■ $AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が実数 $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数