

微分法【微分可能と連続・導関数】

【内容目標】「微分可能」と「連続」の関係性を押さえ、導関数を求められるようにしよう。

□微分係数（おさらい）

関数 $f(x)$ について、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき、

$f(x)$ は $x=a$ で **微分可能** であるという。

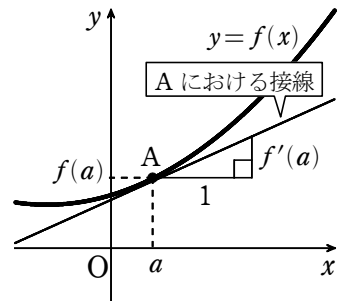
また、この極限値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における 微分係数 または 変化率 といい、 $f'(a)$ で表す。

$$\text{微分係数} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

注意 $a+h=x$ とおくと $h=x-a$ であり、 $h \rightarrow 0$ のとき $x \rightarrow a$ となる。

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、
微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$
における接線の傾きを表す*。

* 連続な関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でないとき、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線が存在しないか、または接線が x 軸に垂直である。



問 1) 関数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ について、 $x=2$ における微分係数を求めよ。

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{2^2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2^2}{2^2 \cdot (2+h)^2} - \frac{(2+h)^2}{2^2 \cdot (2+h)^2}}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{分子の中で通分} \end{array} \right. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-4h - h^2}{2^2 \cdot (2+h)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{分母を逆数の掛け算に} \end{array} \right. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - h}{4(2+h)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ 代入} \end{array} \right. \\ &= \frac{-4}{4 \cdot 2^2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

微分法【微分可能と連続・導関数】

□微分可能と連続

関数 $f(x)$ について、次のことが成り立つ。

微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、 $x=a$ で連続である。

【証明】 $x \neq a$ のとき $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \cdots \textcircled{1}$

ここで、関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ である。

また $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ であるから、 $\textcircled{1}$ より $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = f'(a) \cdot 0 = 0$

よって $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

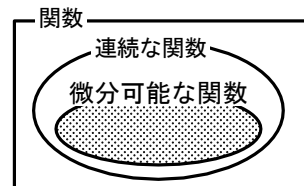
したがって、関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続である。 (終)

「関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $x=a$ で連続」であるが、この逆は成り立たない。

すなわち、「関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても、 $x=a$ で微分可能であるとは限らない。」

グラフが $x=a$ でつながっていても、
その点における接線が存在しない
ような関数 $f(x)$ がある。

視覚的には
 $y=f(x)$ が $x=a$ で
滑らかでなくてはいけない
ということ



例 2) 関数の連続と微分可能

関数 $f(x) = |x|$ について、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \leftarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 0$$

が成り立つから、 $f(x)$ は $x=0$ で連続である。

一方、 $f(x) = |x|$ について

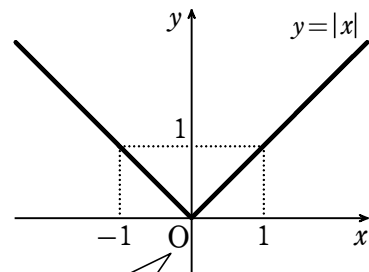
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{である。}$$

$$\text{ここで} \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (-1) = -1$$

であるから、 $h \rightarrow 0$ のときの $\textcircled{1}$ の極限はない。 $\leftarrow$ 右側極限と左側極限が異なるため

よって、関数 $f(x) = |x|$ は $x=0$ で微分可能でない。 (終)



滑らかでない
 $\Rightarrow x=0$ での接線の傾き
が一定しない

微分法【微分可能と連続・導関数】

□導関数

関数 $f(x)$ が、ある区間のすべての x の値で微分可能であるとき、 $f(x)$ はその区間で微分可能であるという。関数 $f(x)$ が、ある区間で微分可能であるとき、その区間の各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させると、1つの新しい関数が得られる。この関数を、 $f(x)$ の導関数といい、記号 $f'(x)$ で表す。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、次の式で定義される。

$$f(x) \text{ の導関数 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

注意 関数 $y = f(x)$ の導関数を、 y' 、 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d}{dx}f(x)$ などの記号でも表す。

関数 $y = f(x)$ において、 x の変化量を表すのに、 h の代わりに記号 Δx を用いることがある。 Δx を x の増分という。このとき、 Δx に対応する y の変化量 $f(x + \Delta x) - f(x)$ を Δy で表し、これを y の増分という。増分を用いると、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、次の式で表される。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

例題) 次の関数の導関数を、定義に従って求めよ。

(1) $f(x) = \frac{1}{2x}$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

解説

(1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x} \right\}$ 分母を逆数の掛け算に

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{x - (x+h)}{2(x+h)x} \right\}$ 通分

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x+h)x}$
 $= -\frac{1}{2x^2}$ 0代入

(2) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ $\frac{0}{0}$ の不定形

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$ 有理化

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$
 $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 0代入

微分法【微分法の基本】

【内容目標】微分法の基本をおさえて計算できるようになろう。

□導関数の計算

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を x で微分する または単に 微分する という。

導関数の公式（1～3は、数学Ⅱで学んだものと同じ）

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

$$1 \quad \{kf(x)\}' = kf'(x) \quad \text{ただし, } k \text{ は定数} \quad 2 \quad \{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$3 \quad \{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

$$4 \quad \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

積の微分法

これを使うと展開しなくてもOK

【4の証明】

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

□の中で帳尻合わせ

ここで、 $f(x)$, $g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

また、微分可能ならば連続であるから $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$

$$\text{よって } \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

終

□関数 x^n の導関数

x^n の導関数（数Ⅱのおさらい）

$$n \text{ が自然数のとき} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

* 二項定理を利用して証明することができる

（教科書参照）

また、 c を定数とすると、 $(c)' = 0$ である。

例題） 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = 2x^5 - 5x^4$$

$$(2) \quad y = (x^2 - 3)(4x^2 + 5)$$

【解答】 (1) $y' = 2 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 = 10x^4 - 20x^3$

(微分) × (そのまま) + (そのまま) × (微分)

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= (x^2 - 3)'(4x^2 + 5) + (x^2 - 3)(4x^2 + 5)' \\ &= 2x(4x^2 + 5) + (x^2 - 3) \cdot 8x \\ &= 8x^3 + 10x + 8x^3 - 24x \\ &= 16x^3 - 14x \end{aligned}$$

いずれか1つの項が微分されたものの和



【参考】3つでも同じ考え方で

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

となる。

微分法【微分法の基本】

□商の微分法

商の導関数については、次の公式が成り立つ。

商の導関数（商の微分法）

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

とくに $f(x)=1$ とすると $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

商（分数型）の微分は

積の微分法は +
商の微分法は -

$$\frac{(\text{分子の微分}) \times (\text{分母}) - (\text{分子}) \times (\text{分母の微分})}{(\text{分母})^2}$$

$$(\text{微分}) \times (\text{そのまま}) - (\text{そのまま}) \times (\text{微分})$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' &= \{(g(x)^{-1})'\} \text{とみると} \\ \{(g(x)^{-1})'\} &= -\{g(x)\}^{-2} \times g'(x) \\ &= -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

※合成関数の微分はのちほど

例題 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{2x+3}$

(2) $y = \frac{2x+3}{x^2+1}$

解説

(1) $y' = -\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2}$

$$(\text{微分}) \times (\text{そのまま}) - (\text{そのまま}) \times (\text{微分})$$

(2) $y' = \frac{(2x+3)'(x^2+1) - (2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - (2x+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2+3x-1)}{(x^2+1)^2}$

□関数 x^n の導関数（拡張）

$$x^n \text{ の導関数 } \quad n \text{ が整数でも有理数でも} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

例題 次の関数を微分せよ。

(1) $y = -\frac{4}{x^2}$

(2) $y = \frac{1}{3x^3}$

(3) $y = \sqrt[3]{x^2}$

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

解答

(1) $y' = (-4x^{-2})' = -4 \cdot (-2)x^{-2-1} = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$

(2) $y' = \frac{1}{3}(x^{-3})' = \frac{1}{3} \cdot (-3)x^{-3-1} = -x^{-4} = -\frac{1}{x^4}$

(3) $y' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(4) $y' = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

単項式の形なら
指数での処理に

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】

【内容目標】 合成関数の微分法は絶対にマスターしよう。

□ 合成関数の微分法

合成関数の微分法

$y = f(u)$ が u の関数として微分可能, $u = g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする。このとき,

合成関数 $y = f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \leftarrow \frac{d\bigcirc}{d\triangle} \text{ は } \bigcirc \text{ を } \triangle \text{ で微分}$$

$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}',$$

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)),$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \quad \text{と表すと,}$$

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

【証明】 u の関数 $y = f(u)$, x の関数 $u = g(x)$ がともに微分可能なとき,

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu , u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$u = g(x)$ は連続であるから, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $g(x + \Delta x) \rightarrow g(x)$

$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ であるから, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ である。

よって
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ で 1 つの記号であるが、

分数のように見ると約分の話

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

【例題】 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (x^3 + x + 1)^4$ $\leftarrow u = x^3 + x + 1$ とすると $y = u^4$

丁寧に書くと…

「 $y = x^4$ だったらいいのにな…」と思って微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot (3x^2 + 1) = 4(x^3 + x + 1)^3 \cdot (3x^2 + 1)'$$

置き換えたもの ($x^3 + x + 1$) の微分

(2) $y = \frac{1}{(2x+1)^3}$ $\leftarrow u = 2x+1$ とすると $y = \frac{1}{u^3}$ すなわち $y = u^{-3}$

丁寧に書くと…

「 $y = x^{-3}$ だったらいいのにな…」と思って微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3u^{-4} \cdot 2 = -\frac{6}{(2x+1)^4}$$

置き換えたもの ($2x+1$) の微分

(3) $y = (3x^2 - 2)^5$ 「 $y = x^5$ だったらいいのにな…」と思って微分

$y = \square^5$ について

$$y' = 5 \square^4 \cdot (\square)'$$

$$y' = 5(3x^2 - 2)^4 \cdot (3x^2 - 2)'$$

$$= 5(3x^2 - 2)^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 - 2)^4$$

置き換えたもの ($3x^2 - 2$) の微分

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】

問13) 微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について、次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{d}{dx}f(ax+b) = af'(ax+b)$ ただし、 a, b は定数

(2) $\frac{d}{dx}\{g(x)\}^n = n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$ ただし、 n は整数

解説

(1) $y = f(ax+b)$, $u = ax+b$ とおくと

$$y = f(u), \quad \frac{dy}{du} = f'(u), \quad \frac{du}{dx} = a$$

置き換えるものが1次式のときの話

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot a = af'(ax+b)$

(2) $y = \{g(x)\}^n$, $u = g(x)$ とおくと

$$y = u^n, \quad \frac{dy}{du} = nu^{n-1}, \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \cdot g'(x) = n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$

□ 逆関数の微分法

逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

逆数の関係

証明 一般に、関数 $f(x)$, $g(x)$ が互いに逆関数で、ともに微分可能であるとする。

$$y = f(x) \text{ を } x \text{ について解くと } x = g(y)$$

$$\text{この両辺を } x \text{ で微分すると } 1 = \frac{d}{dx}g(y)$$

$$\text{すなわち } 1 = \frac{d}{dy}g(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{ここで、} g(y) = x \text{ であるから } 1 = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{ゆえに } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$\frac{dy}{dx}$ で1つの記号であるが、

分数のように見ると逆数の話

$$\frac{dy}{dx} = 1 \div \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

例題) 関数 $y = \sqrt[4]{x}$ の式を x について解くと $x = y^4$ …… ①である。

①の右辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}y^4 = \frac{d}{dy}y^4 \cdot \frac{dy}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx} \leftarrow \text{合成関数の微分法}$$

であるから、①の両辺を x で微分すると

$$1 = 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

よって、関数 $y = \sqrt[4]{x}$ の導関数は、次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

別解

$$y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \text{ なので}$$

$$y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】

□ $x^{\frac{m}{n}}$ の導関数

n が正の整数であるとき、関数 $y = x^{\frac{1}{n}}$ の導関数は、逆関数の微分法を用いて、次のようにして求められる。

↓ 逆関数の微分法

問 15) $y = x^{\frac{1}{n}}$ を x について解くと $x = y^n$ よって $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}}$

ここで $\frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{n}-1}$

したがって $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ すなわち $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

上の結果は、すでに学んだ導関数の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ において、

指数 n を $\frac{1}{n}$ におき換えたものであることがわかる。

例題) 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sqrt{x^3}$

(2) $y = \sqrt[4]{2x-3}$

(3) $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

解説

(1) $y = \sqrt{x^3}$ は $y = x^{\frac{3}{2}}$ と表されるから

$$y' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

(2) $y = \sqrt[4]{2x-3}$ は $y = (2x-3)^{\frac{1}{4}}$ と表されるから

$$\begin{aligned} y' &= \{(2x-3)^{\frac{1}{4}}\}' && \text{「だったらいいのにな…」と思って微分} \\ &= \frac{1}{4} (2x-3)^{\frac{1}{4}-1} \cdot (2x-3)' && \text{置き換えたものの微分} \\ &= \frac{1}{4} (2x-3)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-3)^3}} \end{aligned}$$

(3) $y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$ は $y = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ と表されるから

$$\begin{aligned} y' &= \{(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}\}' && \text{「だったらいいのにな…」と思って微分} \\ &= \frac{1}{3} (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^2+x+1)' && \text{置き換えたものの微分} \\ &= \frac{1}{3} (x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+1) \\ &= \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} \end{aligned}$$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】

【内容目標】 曲線の方程式や媒介変数で表された関数も微分できるようになろう。

□ 曲線の方程式と導関数

(陰関数の微分法)

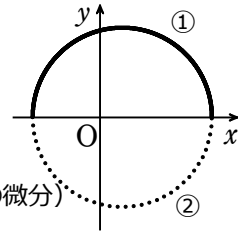
(i) $y = f(x)$ ~ 陽関数 (explicit function)

(ii) $f(x, y) = 0$ ~ 陰関数 (implicit function)

円 $(x-1)^2 + y^2 = 16$ について, この式を y について解くと

$$y^2 = 16 - (x-1)^2 \text{ より } y = \pm \sqrt{16 - (x-1)^2} \text{ であるから,}$$

$$\text{円 } (x-1)^2 + y^2 = 16 \text{ は, 2つの関数 } \begin{cases} y = \sqrt{16 - (x-1)^2} \dots \textcircled{1} \\ y = -\sqrt{16 - (x-1)^2} \dots \textcircled{2} \end{cases}$$



のグラフを合わせたものと考えられる。①の右边を直接微分すると (陽関数の微分)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left[\{16 - (x-1)^2\}^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \{16 - (x-1)^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \{16 - (x-1)^2\}' \\ &= \frac{-2x+2}{2\sqrt{16 - (x-1)^2}} = \frac{-x+1}{\sqrt{16 - (x-1)^2}} = \frac{-x+1}{y} = \frac{-(x-1)}{y} = -\frac{x-1}{y} \end{aligned}$$

②の右边を直接微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left[-\{16 - (x-1)^2\}^{\frac{1}{2}} \right]' = -\frac{1}{2} \{16 - (x-1)^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \{16 - (x-1)^2\}' \\ &= -\frac{-2x+2}{2\sqrt{16 - (x-1)^2}} = \frac{-x+1}{-\sqrt{16 - (x-1)^2}} = \frac{-x+1}{-y} = \frac{-(x-1)}{-y} = -\frac{x-1}{y} \end{aligned}$$

よって, $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y}$

ここで $(x-1)^2 + y^2 = 16$ の両辺を x の関数と考えて, それぞれ x で微分すると (陰関数の微分)

$x-1$ を置き換えるイメージ

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0$$

$$2(x-1) \cdot \left[1 + 2y \cdot \frac{dy}{dx} \right] = 0$$

y はそもそも x の関数で $y(x)$ と表すべきものだから合成関数の微分法を用いる

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2(x-1)$$

y を置き換えるイメージ

よって, $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y}$

例題) 次の方程式で定められる x の関数 y について, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。 → 問 19・20へ

(1) $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ x だったらいいのにな

(1) $x^2 + \boxed{y^2} + 2x - 4 = 0$ の両辺を x について微分すると

$$2x + \boxed{2y} \cdot \frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x - 2$$

よって, $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{y}$

(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ $4x^2$ だったらいいのにな

(2) $9x^2 - \boxed{4y^2} = -36$ の両辺を x について微分すると

$$18x - \boxed{8y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8y \cdot \frac{dy}{dx} = -18x$$

よって, $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y}$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】

□ 曲線の媒介変数表示と導関数

t を媒介変数として、次のように**媒介変数表示**される曲線 C について考えてみよう。

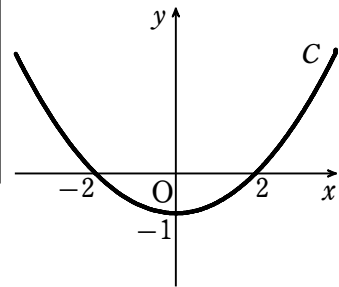
$$x = 2t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = t^2 - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②から t を消去すると

$$y = \frac{x^2}{4} - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

このように媒介変数（パラメータ）を用いて表現された状態を媒介変数表示という（ t は x と y の橋渡し役になる）



のように陽関数になり、曲線 C は右の図のような放物線である。

曲線の媒介変数表示と導関数について、次のことが成り立つ。

曲線の媒介変数表示と導関数

$$x = f(t), \quad y = g(t) \text{ のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$x = f(t), y = g(t)$ それぞれを t について微分してまとめよう

【解説】 合成関数および逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

一般に、座標平面上の曲線 C の媒介変数表示が、媒介変数を t として与えられたとき、この媒介変数表示が x の関数 y を定めると考え、 $\frac{dy}{dx}$ を求めることができる。

【例題】 x の関数 y が、 t, θ を媒介変数として、次の式で表されるとき、

導関数 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2t^3 + 1 \\ y = t^2 + t \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$$

$1-t^2$ が t だったらいいのにな

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = 6t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 1$$

x, y それぞれ t で微分

よって、 $t \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t+1}{6t^2}$$

省略されることも

$$(2) \quad t \neq \pm 1 \text{ のとき}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

x, y それぞれ t で微分

よって、 $t \neq 0, t \neq \pm 1$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}} = -2\sqrt{1-t^2}$$

※ t ではなく x, y のみにするときもある

（そのときは与えられた式を $t =$ にして代入しよう）

微分法【三角関数の導関数】

【内容目標】 三角関数の微分をマスターしよう。

□三角関数の導関数

導関数の定義より $(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ において,

$$\text{加法定理 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ &= (\cos h - 1) \sin x + \cos x \sin h \end{aligned}$$

であるから $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right)$

ここで, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ により

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x$$

よって $(\sin x)' = \cos x$

次に, 等式 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ と合成関数の微分法から

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left\{ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right\}' \quad \left(\sin x \text{ だったらいいのにな} \right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

したがって $(\cos x)' = -\sin x$

さらに, $\sin x$, $\cos x$ の導関数を利用して, $\tan x$ の導関数を求めよう。

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ と商の導関数の公式から

(微分) × (そのま) − (そのま) × (微分)

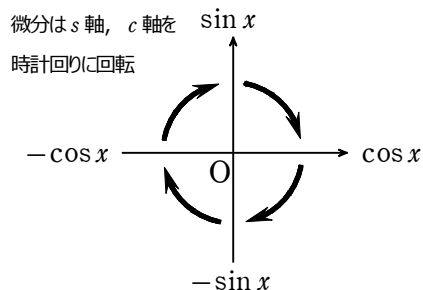
$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

これらの結果をまとめると, 次のようになる。

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$



微分法【三角関数の導関数】

例題) 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin(2x - 3)$

(2) $y = \cos^2 x$

(3) $y = \frac{1}{\tan x}$

解答 (1) $y' = \cos(2x - 3) \cdot (2x - 3)'$ sin x だったらいいのにな
 $= 2\cos(2x - 3)$

(2) 半角の公式より

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

よって $y' = \left\{ \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right\}'$
 $= \frac{1}{2}(0 - \sin 2x \cdot 2)$
 $= -\sin 2x$

x だったらいいのにな

x² だったらいいのにな

別解

$$\begin{aligned} y' &= \{(\cos x)^2\}' \\ &= 2\cos x \cdot (\cos x)' \\ &= 2\cos x \cdot (-\sin x) \\ &= -2\sin x \cos x \\ &= -\sin 2x \end{aligned}$$

(3) $y' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}$ 商の微分法
 $= -\frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
 $= -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
 $= -\frac{1}{\sin^2 x}$

別解

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tan x} \right)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

◎ 三角関数は「半角の公式」や「和積・積和の公式」で倍角に変換すると良い

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

例題) 関数 $y = x \sin x + \cos x$ を微分せよ。

積の微分法

解答 $y' = (x \sin x)' + (\cos x)'$
 $= \{(x)' \sin x + x(\sin x)'\} - \sin x$
 $= (1 \cdot \sin x + x \cos x) - \sin x$
 $= x \cos x$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】

【内容目標】 対数関数・指数関数の微分をマスターしよう。

□ 対数関数の導関数

a は 1 でない正の定数とする。微分係数の定義より

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} & \quad \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) \right\} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

ここで, $\frac{h}{x} = k$ とおくと,

$$\begin{aligned} h \rightarrow 0 \text{ のとき } k \rightarrow 0 \text{ であるから} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

0 に近い k の値について, $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値は, 次の表のようになる。

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$	k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	2.593742.....	-0.1	2.867971.....
0.01	2.704813.....	-0.01	2.731999.....
0.001	2.716923.....	-0.001	2.719642.....
0.0001	2.718145.....	-0.0001	2.718417.....
0.00001	2.718268.....	-0.00001	2.718295.....

この表から, $k \rightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくと予想される。また, 実際に極限值をもつことが知られている。この極限値を e で表す。

$$e = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \text{ でも表される。}$$

∞ に近づく

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

0 に近づく

e は次のような数で, 無理数であることが知られている。

$$e = 2.71828182845 \dots\dots$$

正の定数 e を用いると, ① から次が成り立つ。

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$$

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a}, \quad \log_e e = 1$$

とくに, 対数の底が e のときは, 次のようになる。

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$$

e を底とする対数を **自然対数** という。微分法や積分法では $\log_e x$ の底 e を省略して $\log x$ と書くことが多く, 自然対数を単に対数ということもある。

e を「自然対数の底」や「ネイピア数」と呼ぶ

以上をまとめると, 次のようになる。

対数関数の導関数

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】

例題) 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log 2x$

$2x$ が x だったらいいのにな

(2) $y = \log_2(3x+2)$

$3x+2$ が x だったらいいのにな

(3) $y = x \log 3x$

積の微分法

&

$3x$ が x だったらいいのにな

解答 (1) $y' = \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

(2) $y' = \frac{1}{(3x+2)\log 2} \cdot (3x+2)'$
 $= \frac{3}{(3x+2)\log 2}$

$$\{\log |f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(3) $y' = (x)' \cdot \log 3x + x(\log 3x)'$
 $= 1 \cdot \log 3x + x \cdot \frac{3}{3x}$
 $= \log 3x + 1$

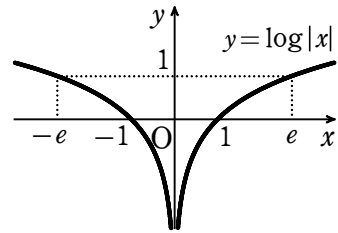
対数関数の導関数を用いて、関数 $\log |x|$ の導関数を求めてみよう。

$x > 0$ のとき $(\log |x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

$x < 0$ のとき $(\log |x|)' = \{\log(-x)\}' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$

したがって、関数 $\log |x|$ の導関数は、次の式で表される。

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$



練習) $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$ であることを示せ。ただし、 a は 1 でない正の定数とする。

$x > 0$ のとき $(\log_a |x|)' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$

$x < 0$ のとき $(\log_a |x|)' = \{\log_a(-x)\}' = \frac{1}{-x \log a} \cdot (-x)' = \frac{1}{x \log a}$

よって $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$

以上をまとめると、次のようになる。

絶対値を含む対数関数の導関数

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】

次の関数を微分せよ。

$$(1) \ y = \log |3x - 1| \quad (2) \ y = \log_{10} |2x| \quad (3) \ y = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

〔解答〕 (1) $y' = \frac{1}{3x-1} \cdot (3x-1)' = \frac{3}{3x-1}$

(2) $y' = \frac{1}{2x \log 10} \cdot (2x)' = \frac{2}{2x \log 10} = \frac{1}{x \log 10}$

$$\log_a M \times N = \log_a M + \log_a N$$

〔別解〕 $y = \log_{10} 2 + \log_{10} |x|$ であるから $y' = \frac{1}{x \log 10}$

(3) $y = \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \log |x-1| - \log |x+1|$ であるから

$$y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

□ **対数微分法** ～ 両辺の自然対数をとって微分する方法 $(\log |y|)' = \frac{y'}{y}$

例) $\log |y|$ の導関数を利用して、関数 $y = (x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{3x+1}$ を微分する。

〔解答〕 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log |y| = \log |(x-1)^2 (3x+1)^{\frac{1}{3}}|$$

右辺を変形すると

$$\log_a M \times N = \log_a M + \log_a N$$

$$\log |(x-1)^2 (3x+1)^{\frac{1}{3}}| = \log |x-1|^2 + \log |3x+1|^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2 \log |x-1| + \frac{1}{3} \log |3x+1|$$

よって $\log |y| = 2 \log |x-1| + \frac{1}{3} \log |3x+1|$

両辺の関数を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= 2 \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x+1} \\ &= \frac{2(3x+1)}{(x-1)(3x+1)} + \frac{x-1}{(x-1)(3x+1)} \\ &= \frac{7x+1}{(x-1)(3x+1)} \end{aligned}$$

$$\{\log |f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

よって $y' = \frac{7x+1}{(x-1)(3x+1)} \cdot y$

$$\begin{aligned} &= \frac{7x+1}{(x-1)(3x+1)} \cdot (x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{3x+1} \\ &= \frac{(7x+1)(x-1)}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} \end{aligned}$$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】

□ 指数関数の導関数

a は 1 でない正の定数とする。指数関数 $y = a^x$ の導関数を調べよう。

○ 逆関数の微分法と

対数関数の導関数の公式の利用

$y = a^x$ を x について解くと $x = \log_a y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{y \log a}$$

よって $(a^x)' = a^x \log a$

また、

$y = e^x$ を x について解くと $x = \log y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{y}$$

よって $(e^x)' = e^x$

$y = a^x$ 代入

$y = e^x$ 代入

○ 対数微分法の利用

$y = a^x$ の両辺の対数をとると

$$\log y = \log a^x$$

$$\log y = x \log a$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \log a$$

よって $y' = y \cdot \log a$

$$\therefore (a^x)' = a^x \log a$$

とくに $a = e$ とすると

$$(e^x)' = e^x \log e$$

ゆえに $(e^x)' = e^x$

以上をまとめると、次のようになる。

指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

次の関数を微分せよ。ただし、 $a > 0$, $a \neq 1$ とする。

(1) $y = e^{2x}$

(2) $y = a^{-2x}$

(3) $y = xa^x$

【解答】 (1) $y' = e^{2x} \cdot (2x)'$ $\leftarrow 2x$ が x だったらいいのにな
 $= 2e^{2x}$

(2) $y' = a^{-2x} \log a \cdot (-2x)'$ $\leftarrow -2x$ が x だったらいいのにな
 $= -2a^{-2x} \log a$

(3) $y' = (x)' a^x + x(a^x)'$ $\leftarrow$ 積の微分法「微分そのまま + そのまま微分」
 $= 1 \cdot a^x + x \cdot a^x \log a$ $\leftarrow a^x$ でくくっておく
 $= a^x(1 + x \log a)$

微分法【高次導関数】

【内容目標】高次導関数の表記法を身につけ計算できるようにしよう。

□第 n 次導関数

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である。この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき、さらに微分して得られる導関数を、関数 $y = f(x)$ の **第 2 次導関数** といい、 $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ などの記号で表す。さらに、 $f''(x)$ の導関数を、関数 $y = f(x)$ の **第 3 次導関数** とい、 $y''', f'''(x), \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3} f(x)$ などの記号で表す。

注意 $y', f'(x)$ などを 第 1 次導関数 ということがある。

例) 次の関数について、第 2 次導関数および第 3 次導関数を求めよ。

ただし、(1) の a は 0 でない定数とする。

(1) $y = ax^3$ (2) $y = \sqrt{x+1}$

(3) $y = \cos x$ (4) $y = e^x$

(1) $y' = 3ax^2$ から $y'' = 6ax, y''' = 6a$

微分を繰り返すので
指数のままにしておく

(2) $y = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ より、 $y' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ であるから

$$y'' = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}, y''' = \frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{よって } y'' = -\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}, y''' = \frac{3}{8(x+1)^2\sqrt{x+1}}$$

(3) $y' = -\sin x$ から $y'' = -\cos x, y''' = \sin x$

(4) $y' = e^x$ から $y'' = e^x, y''' = e^x$

一般に、関数 $y = f(x)$ を順次微分して n 回微分後に得られる関数を、 $y = f(x)$ の **第 n 次導関数** といい、 $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n} f(x)$ などの記号で表す。なお、 $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ は、それぞれ y', y'', y''' を表す。第 2 次以上の導関数を **高次導関数** という。

たとえば、関数 $y = e^{-x}$ の導関数について、第 n 次導関数は $y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$ である。

微分法【高次導関数】

例題 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = e^{2-x}$

(2) $y = x^n$

(3) $y = xe^x$

解答

(1) $y' = e^{2-x} \cdot (-1) = -e^{2-x},$

$y'' = -e^{2-x} \cdot (-1) = (-1)^2 e^{2-x},$

$y''' = (-1)^2 e^{2-x} \cdot (-1) = (-1)^3 e^{2-x}, \dots\dots$

よって $y^{(n)} = (-1)^n e^{2-x}$

$(-1)^{\square}$ が第 n 次導関数と一致する

次数より 1 少ない

次数と一致

(2) $y' = nx^{n-1}, y'' = n(n-1)x^{n-2}, y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \dots\dots$

よって $y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots\dots\{n-(n-1)\} \cdot x^{n-n}$

$= n(n-1)(n-2)\dots\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

(3) $y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$

$y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x,$

$y''' = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x, \dots\dots$

よって $y^{(n)} = (x+n)e^x$

次数と一致

例題 関数 $y = e^{-x} \cos x$ は、次の等式を満たすことを示せ。

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

解説

$$y' = -e^{-x} \cos x + e^{-x}(-\sin x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

$$y'' = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cos x)$$

$$= 2e^{-x} \sin x$$

よって $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \sin x - 2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x} \cos x = 0$

例題 関数 $y = e^x(\sin x + \cos x)$ について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

解説

$$y' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$$y'' = 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

よって

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x(\cos x - \sin x) - 2 \cdot 2e^x \cos x + 2e^x(\sin x + \cos x)$$

$$= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 4e^x \cos x + 2e^x \sin x + 2e^x \cos x$$

$$= 0$$