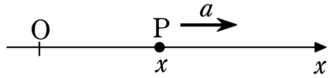
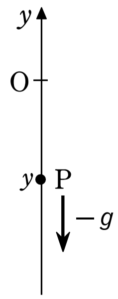
積分とその応用【微分方程式】

点 P が，x 軸上を一定の速度 a で運動する場合，
時刻 t における P の座標を x とすると，x は t の関数であって



$$\frac{dx}{dt}=a \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす。



また，物体が落下する場合，基準の点 O から鉛直上方に向かう直線を y 軸にとり，時刻 t における物体の位置を，その座標 y で表すと，y は

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす。ただし，g は重力加速度の大きさである。

等式 ① と ② では，t の関数 x，y が満たす条件が，x と y の導関数を用いて示されている。これらの条件を満たす未知の関数 x，y はどのような関数であるかを考えてみよう。

なお一般に，未知の関数の導関数を含む等式を，**微分方程式** という。

a，g を定数とするとき，微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=a \quad \cdots\cdots ①, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-g \quad \cdots\cdots ②$$

微分方程式での C は
任意定数　という

を満たす関数を求めてみよう。

① の両辺を t について積分すると

$$x=at+C, \quad C \text{ は任意の定数} \quad \cdots\cdots ③$$

定数 C がどのような値をとっても，③ は微分方程式 ① を満たす。

また，② の両辺を t について積分すると

$$\frac{dy}{dt}=-gt+C_1, \quad C_1 \text{ は任意の定数}$$

この両辺を更に t について積分すると

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \quad C_1,\ C_2 \text{ は任意の定数} \quad \cdots\cdots ④$$

定数 C_1，C_2 がどのような値をとっても，④ は微分方程式 ② を満たす。

一般に，与えられた微分方程式を満たす関数を，その微分方程式の **解** といい，解を求めることを，その微分方程式を **解く** という。

なお，微分方程式の解は，いくつかの任意の定数を含む関数となる。

「$x=0$ のとき $y=-1$」のような条件が与えられると，微分方程式の解に含まれる定数の値を定めることができる。このような条件を，微分方程式の **初期条件** という。

積分とその応用【微分方程式】

□直接積分形

$\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ の形の微分方程式を **直接積分形** という。

解説　両辺を x で積分して一般解を求める

$$y=\int f(x)\,dx+C=F(x)+C \qquad \text{一般解は}\quad y=F(x)+C$$

初期条件　$y(a)=b$ を満たす特殊解を求めたいときは，

一般解に　$x=a$，　$y=b$ を代入して定数 C の値を求める。

例) (1)　$\dfrac{dy}{dx}=x^2$　の一般解は　$y=\displaystyle\int x^2dx=\dfrac{1}{3}x^3+C$

(2)　$x\dfrac{dy}{dx}=1$　は　$x\fallingdotseq 0$　より　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

一般解は　$y=\displaystyle\int\dfrac{1}{x}dx=\log|x|+C$

例えば，初期条件　$y(1)=1$ となる解があれば　$1=0+C$　より　$C=1$

よって　　$y=\log|x|+1$

□変数分離形

微分方程式が $f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}=g(x)$ の形に式変形できる場合，この式の両辺を x について積分すると

$$\int f(y)\,dy=\int g(x)\,dx$$

となり，微分方程式を解くことができる。$g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ の形の微分方程式を **変数分離形** という。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(x)}{g(y)}$，　$\dfrac{dy}{dx}=f(x)\,h(y)$ の式も変形すると上の式の形になるので変数分離形である。

解説　両辺を x で積分して一般解を求める　$\displaystyle\int\left\{g(y)\frac{dy}{dx}\right\}dx=\int f(x)\,dx+C$

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C \qquad \text{よって}\quad G(y)=F(x)+C$$

求まった式を変形し，定数を置き換え整理するなどして一般解とする。

特殊解については直接積分形と同じである。

例)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ のとき　$y\dfrac{dy}{dx}=-x$

両辺を x について積分すると $\displaystyle\int y\frac{dy}{dx}\,dx=-\int x\,dx$

すなわち　$\displaystyle\int y\,dy=-\int x\,dx$　　　よって　$\dfrac{1}{2}y^2=-\dfrac{1}{2}x^2+C_1$

$2C_1=C$ とおくことにより　一般解は　$x^2+y^2=C$

例えば　初期条件　$y(0)=1$ となる解があれば　$0+1=C$　より　$C=1$

よって　　$x^2+y^2=1$

積分とその応用【微分方程式】

□同次形

$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形に変形できる微分方程式を **同次形** という。

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくことで 変数分離形にすることができる。

解説 $x\cdot\dfrac{dy}{dx}=x+y$ より $\dfrac{dy}{dx}=1+\dfrac{y}{x}$ …①

ここで $\dfrac{y}{x}=u$ …② とおくと $y=x\cdot u$

両辺を x で微分すると $\dfrac{dy}{dx}=1\cdot u+x\cdot\dfrac{du}{dx}$ …③

①②③ より $u+x\cdot\dfrac{du}{dx}=1+u$ ∴ $x\dfrac{du}{dx}=1$

$du=\dfrac{dx}{x}$ とみると $\displaystyle\int du=\int\frac{dx}{x}$ ∴ $u=\log|x|+C$

②より $\dfrac{y}{x}=\log|x|+C$

よって $y=x(\log|x|+C)$

□ベルヌーイの方程式

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$ $(n\fallingdotseq 0,\ 1)$ を

ベルヌーイの方程式 という。

なお，$n=0$ のときは 線形微分方程式

$n=1$ のときは 変数分離形 である。

ダニエル・ベルヌーイ

Daniel Bernoulli,

1700/2/8/ ～ 1782/3/17

解説

y^n でわると $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)\,y^{-n}=Q(x)$ …①

$u=y^{1-n}$ とおき x で微分すると $\dfrac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ となるから

$1-n\fallingdotseq 0$ なので $\dfrac{1}{(1-n)\,y^{-n}}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$

①は $\dfrac{1}{1-n}\cdot\dfrac{du}{dx}+P(x)\cdot u=Q(x)$

両辺に $1-n$ を掛けると $\dfrac{du}{dx}+(1-n)\cdot P(x)\cdot u=(1-n)Q(x)$

$S(x)=(1-n)P(x)$， $T(x)=(1-n)Q(x)$ とおくと

$\dfrac{du}{dx}+S(x)\cdot u=T(x)$ これは１階線形微分方程式である。

ゆえに一般解は $y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\displaystyle\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right)$

積分とその応用【微分方程式】

□線形微分方程式

関数 y とその導関数 y'， y''， y'''，・・・についての1次方程式

$$A_n(x)\,y^{(n)}+A_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\cdots\cdots+A_2(x)\,y''+A_1(x)\,y'+A_0(x)\,y=F(x)$$

を **線形微分方程式** という．また， $F(x)$ のことを **非同次項** という．

$F(x)=0$ の場合，**線形同次微分方程式** といい，

$F(x)\neq 0$ の場合，**線形非同次微分方程式**という．

線形微分方程式に含まれる導関数の最高次数が n 次だとすると， n 階線形微分方程式という．

例　$y'+x^2y=3$　…　１階線形非同次微分方程式

$y''+2y'+y=e^{2x}$　…　２階線形非同次微分方程式

$x^3y'''+x^2y''+xy'+y=0$　…　３階線形非同次微分方程式

□１階線形微分方程式

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$　…①　を１階線形微分方程式といい，

解は　$y=e^{-\int Pdx}\left(\int Q\,e^{\int Pdx}dx+C\right)$　となる。

例）　y は x の関数，k は定数とする。微分方程式 $y'=ky$ を解け。

解

[1]　定数関数 $y=0$ は明らかに解である。

[2]　$y\neq 0$ のとき，方程式を変形すると　$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=k$

両辺を x で積分すると　$\displaystyle\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int kdx$

左辺に置換積分法の公式を用いると　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int kdx$

ゆえに　$\log|y|=kx+C$，　C は任意の定数

対数の定義より　$|y|=e^{kx+C}=e^Ce^{kx}$　　すなわち　$y=\pm e^Ce^{kx}$

ここで，$\pm e^C=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる。

したがって，解は　$y=Ae^{kx}$，$A\neq 0$

[1] で求めた解 $y=0$ は，[2] で求めた解 $y=Ae^{kx}$ において，$A=0$ とおくと得られる。

ゆえに，求める解は　$y=Ae^{kx}$，A は任意の定数

積分とその応用【微分方程式】

物理や工学は言うに及ばず，生物学や社会学において現象を支配する法則を表現すると微分方程式の形になることが多い。ここの目的は，現象から微分方程式の導出し，導出した微分方程式を数値解析を通して視覚化することである。

□捕食者と被捕食者の問題

きめられた地域の中でウサギと狐のみの関係を考察し，他の個体種の影響はないとする。狐はウサギを補食して増えており，ウサギがいないと死滅する。ウサギは捕食者である狐がいないと，爆発的に増殖する。この仮定の下にウサギと狐の個体種の増減を考察する。ウサギの個体数を $x(t)$ ，狐の個体数を $y(t)$ とする。 a, b, c, d を正定数として

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x$$

$$\frac{dy}{dt} = (cx - d)y$$

が成り立つ。

解説　個体数の変化率＝（出生率－死亡率）×個体数

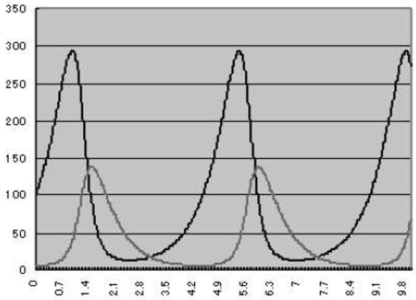
をもとにして考える。ウサギの増加による減少は狐に補食されて減少する割合に比べて無視できるものとする。ウサギ固有の出生率を a とし，狐に補食される事による死亡率は by と考えられる。ウサギの個体数の変化に関する方程式は

$$\frac{dx}{dt} = (a - by)x$$

である。一方狐はウサギを補食することによる出生率は cx と考えられ，死亡率は d と考えられる。したがって狐の個体数の変化に関する方程式は

$$\frac{dy}{dr} = (cx - d)y$$

連立方程式 (3)，(4) を解いたグラフが次の図である。



積分とその応用【微分方程式】

練習　y は x の関数とする。次の微分方程式を解け。

(1)　$xy'=y$　　　　(2)　$y'=2xy$

解説

(1)　[1]　定数関数 $y=0$ は明らかに解である。

[2]　$y\fallingdotseq 0$ のとき，$x\fallingdotseq 0$であるから，方程式を変形すると　$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

両辺を x で積分すると　$\displaystyle\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{dx}{x}$

左辺に置換積分法の公式を用いると　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$

よって　$\log|y|=\log|x|+C$，　C は任意の定数

ゆえに　$|y|=e^C|x|$　すなわち　$y=\pm e^Cx$

ここで，$\pm e^C=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる。

したがって，解は　$y=Ax$，$A\fallingdotseq 0$

[1] で求めた解 $y=0$ は，[2] で求めた解 $y=Ax$ において，$A=0$ とおくと得られる。

ゆえに，求める解は　$y=Ax$，A は任意の定数

(2)　[1]　定数関数 $y=0$ は明らかに解である。

[2]　$y\fallingdotseq 0$ のとき，方程式を変形すると　$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=2x$

両辺を x で積分すると　$\displaystyle\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int 2xdx$

左辺に置換積分法の公式を用いると　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$

よって　$\log|y|=x^2+C$，　C は任意の定数

ゆえに　$|y|=e^{x^2+C}$　すなわち　$y=\pm e^{x^2+C}=\pm e^Ce^{x^2}$

ここで，$\pm e^C=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる。

したがって，解は　$y=Ae^{x^2}$，$A\fallingdotseq 0$

[1] で求めた解 $y=0$ は，[2] で求めた解 $y=Ae^{x^2}$ において，$A=0$ とおくと得られる。

ゆえに，求める解は　$y=Ae^{x^2}$，A は任意の定数

積分とその応用【微分方程式】

練習　次の微分方程式を，[　]内の初期条件のもとで解け。

(1)　$y'=\dfrac{x}{y}$　[$x=1$ のとき $y=2$]　　　(2)　$y'=x\sqrt{y}$　[$x=1$ のとき $y=1$]

解説

(1)　方程式を変形すると　$y\cdot\dfrac{dy}{dx}=x$

両辺を x で積分すると　$\displaystyle\int y\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int xdx$

よって　$\dfrac{1}{2}y^2=\dfrac{1}{2}x^2+C$，　C は任意の定数

$x=1$ のとき $y=2$ であるから　$2=\dfrac{1}{2}+C$

ゆえに　$C=\dfrac{3}{2}$

よって　$\dfrac{1}{2}y^2=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$　すなわち　$x^2-y^2=-3$

したがって　$y=\pm\sqrt{x^2+3}$

初期条件を満たす関数は $y=\sqrt{x^2+3}$ の方だけであるから，求める関数は

$$y=\sqrt{x^2+3}$$

(2)　定数関数 $y=0$ は与えられた初期条件を満たさない。

$y\fallingdotseq 0$ のとき，方程式を変形すると　$\dfrac{1}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{dy}{dx}=x$

両辺を x で積分すると　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int xdx$

よって　$2\sqrt{y}=\dfrac{1}{2}x^2+C$，　C は任意の定数

$x=1$ のとき $y=1$ であるから　$2=\dfrac{1}{2}+C$

ゆえに　$C=\dfrac{3}{2}$

したがって，求める関数は

$$2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\quad すなわち \quad y=\frac{1}{16}(x^2+3)^2$$