

微分の応用【接線と法線】

【内容目標】 いろいろな曲線の接線を求められるようになろう。

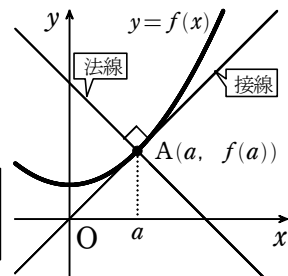
□接線の方程式

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きに等しい。曲線上の点 A を通り、 A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を、点 A におけるこの曲線の **法線** という。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しいから、 $f'(a) \neq 0$ のとき、点 A における法線の

傾きは $-\frac{1}{f'(a)}$ である。

掛けて $-1 \Rightarrow$ 符号違いの逆数



よって、次のことが成り立つ。

接線の方程式・法線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における

接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

法線の方程式は $f'(a) \neq 0$ のとき

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

注意 $f'(a) = 0$ のとき、法線の方程式は $x = a$ である。

例題 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $(4, 2)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

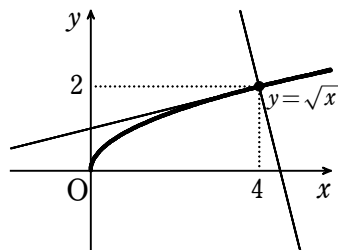
解答 $f(x) = \sqrt{x}$ とすると

まずは微分

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

符号違いの逆数

であるから $f'(4) = \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{f'(4)} = -4$



よって、点 $(4, 2)$ における接線の方程式は

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$

よって、点 $(4, 2)$ における法線の方程式は

$$y - 2 = -4(x - 4) \quad \text{すなわち} \quad y = -4x + 18$$

微分の応用【接線と法線】

応用例題 1) 曲線 $y = \log x$ について、次のような接線の方程式を求めよ。

- (1) 傾きが e である (2) 原点を通る

方針 接点がわからないので、自分で接点を作る

数Ⅱの時と同じ

⇒接点の座標を $(a, \log a)$ として、この点における接線の方程式を作り、
条件を満たすように a の値を定める。

解答 $y = \log x$ を微分すると $y' = \frac{1}{x}$

接点の x 座標を a とすると
接点の y 座標は $y = \log x$ に代入
して $\log a$ となる

ここで、接点の座標を $(a, \log a)$ とすると、接線の方程式は

$$y - \log a = \frac{1}{a}(x - a)$$

$$y - \log a = \frac{1}{a}x - 1$$

$$\text{すなわち} \quad y = \frac{1}{a}x + \log a - 1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

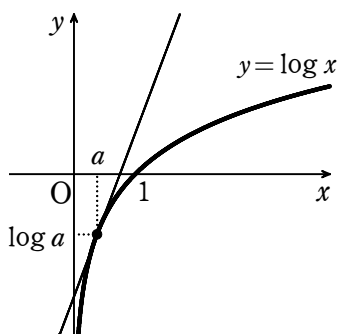
- (1) 接線 ① の傾きが e であるから

$$\frac{1}{a} = e \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{1}{e}$$

① に代入すると

$$y = ex - 1 - 1$$

$$\text{整理して} \quad y = ex - 2$$



- (2) 接線 ① が原点 $(0, 0)$ を通るから

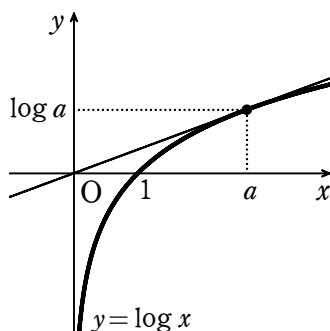
$$0 = \frac{1}{a} \cdot 0 + \log a - 1$$

$$\text{よって} \quad \log a = 1$$

$$\text{したがって} \quad a = e$$

① に代入すると

$$y = \frac{1}{e}x$$



微分の応用【接線と法線】

□ 曲線の方程式と接線

曲線が x, y の方程式（陰関数）で表される場合には、 y を x の関数とみて、方程式を x で微分して導関数 y' を求めることができる。

例) 円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の点 $(\sqrt{3}, 1)$ における接線

$x^2 + y^2 = 4$ の両辺を x で微分すると

$$2x + 2yy' = 0$$

x だったらいいのにな

よって、 $y \neq 0$ のとき $y' = -\frac{x}{y}$

$x = \sqrt{3}$, $y = 1$ を代入すると接線の傾きは

$$-\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

よって接線は $y - 1 = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3})$

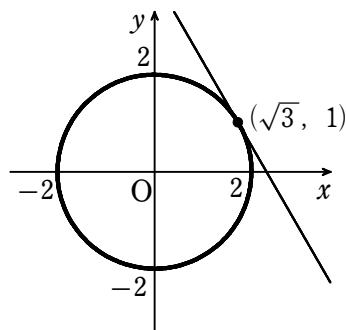
$$y - 1 = -\sqrt{3}x + 3$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x + 4$$

数Ⅱのときは公式より

$$\sqrt{3}x + 1 \cdot y = 4$$

これを变形すると $y = -\sqrt{3}x + 4$



例題2) 楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2, -1)$ における接線の方程式を求めよ。

【解答】 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{8} + \frac{2yy'}{2} = 0$$

x だったらいいのにな

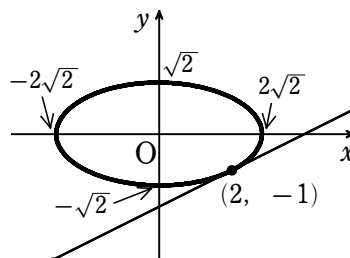
よって、 $y \neq 0$ のとき

$$y' = -\frac{x}{4y}$$

ゆえに、点 $(2, -1)$ における接線の傾きは $-\frac{2}{4 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}x - 2$$



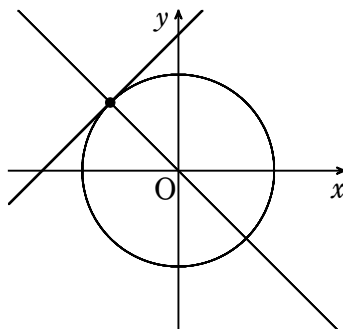
微分の応用【接線と法線】

□媒介変数で表示された曲線の接線

媒介変数で表示された曲線の場合には、媒介変数の微分法を利用して導関数 y' を求めることができる。

例題 3) 与えられた点 P における、次の曲線の接線および法線の方程式を求めよ。

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta, \quad P \text{ は } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ に対応する点}$$



解答 $\frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$

それぞれ微分

ゆえに $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos\theta}{-2\sin\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

合体

よって、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき $\frac{dy}{dx} = 1$

また、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき $x = 2\cos\frac{3}{4}\pi = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$

$$y = 2\sin\frac{3}{4}\pi = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

ゆえに、点 $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ における接線の方程式は

$$y - \sqrt{2} = x - (-\sqrt{2})$$

すなわち

$$y = x + 2\sqrt{2}$$

法線の方程式は

$$y - \sqrt{2} = -(x + \sqrt{2})$$

すなわち

$$y = -x$$

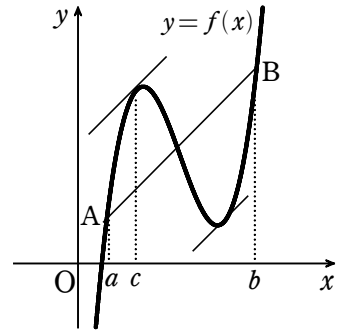
微分の応用【平均値の定理】

【内容目標】平均値の定理を利用して証明できるようになる。

□平均値の定理 (→中間値の定理のときに配ったプリントを参照しよう)

連続な関数 $f(x)$ について、 $y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ をとる。

$f(x)$ が区間 (a, b) で微分可能ならば、このグラフ上の A , B 間の点における接線で、直線 AB と平行なものが少なくとも 1 本存在することが知られている。ここで、直線 AB の傾きは $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である。



また、接点の x 座標を c とすると、接線の傾きは $f'(c)$ である。

したがって、次を満たす実数 c が存在する。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b$$

一般に、次の平均値の定理が成り立つ。

図形的には「曲線 $y=f(x)$ 上に任意の 2 点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ をとると、線分 AB と平行な接線が引けるような点 C が、2 点 A , B 間の曲線上にある。

平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad a < c < b \text{ を満たす実数 } c \text{ が存在する。}$$

例) 次の関数と示された区間について、次の平均値の定理の式を満たす c の値を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $[-2, 1]$

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ は微分可能で

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 6c$$

$$\text{また } \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = \frac{-2-(-20)}{3} = 6$$

よって、平均値の定理により

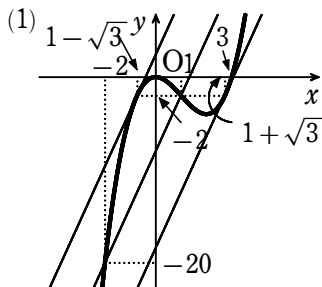
$$6 = 3c^2 - 6c, \quad -2 < c < 1$$

を満たす実数 c が存在する。

$$c^2 - 2c - 2 = 0 \text{ から } c = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$-2 < c < 1 \text{ であるから } c = 1 - \sqrt{3}$$

【参考】



(2) $f(x) = e^x$, $[0, 1]$

(2) 関数 $f(x) = e^x$ は微分可能で

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(c) = e^c$$

$$\text{また } \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = e - 1$$

よって、平均値の定理により

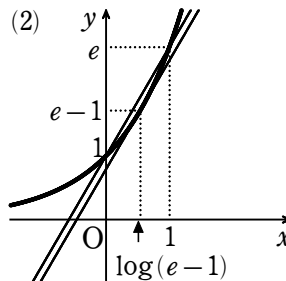
$$e - 1 = e^c, \quad 0 < c < 1$$

を満たす実数 c が存在する。

したがって

$$c = \log(e - 1)$$

対数の
定義



微分の応用【平均値の定理】

平均値の定理において、関数 $f(x)$ は区間の端点 a, b では微分可能である必要はなく、連続でありさえすればよい。

しかし、 a と b の間に微分可能でない点が1つでもある場合には、平均値の定理を満たす c が存在するとは限らない。

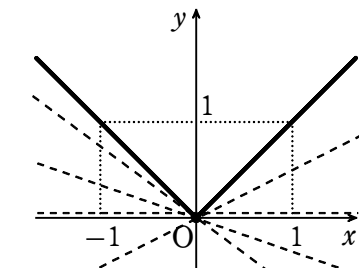
たとえば、区間 $[-1, 1]$ において、 $f(x) = |x|$ のとき、

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0 \text{ であるが}$$

$f'(c) = 0$, $-1 < c < 1$ を満たす c は存在しない。

これは、区間 $[-1, 1]$ で

$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能でないからである。



$(0,0)$ ではいろいろな接線が引けてしまう

⇒微分可能ではない

応用例題 平均値の定理を用いて、次のことを証明せよ。

$$a > 0 \text{ のとき } \frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$

解答

関数 $f(x) = \log x$ は、

$$x > 0 \text{ で微分可能で } f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(c) = \frac{1}{c}$$

区間 $[a, a+1]$ において、

平均値の定理を用いると

$$\frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < a+1$$

$$\text{すなわち } \log(a+1) - \log a = \frac{1}{c}, \quad a < c < a+1$$

を満たす実数 c が存在する。

ここでいったん平均値の定理から離れる

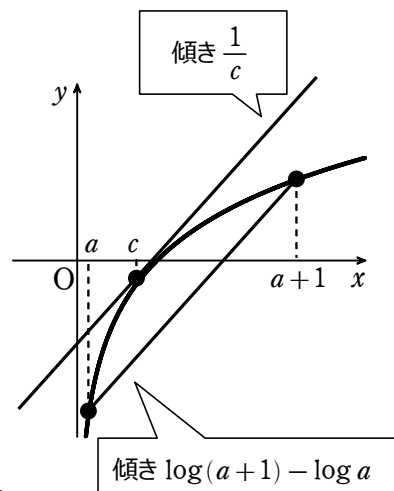
$f'(x) = \frac{1}{x}$ は $x > 0$ で単調に減少するから、

$a < c < a+1$ より

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a+1}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \quad \frac{1}{c} = \log(a+1) - \log a \text{ なので}$$

$$\text{したがって } \frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$$



微分の応用【関数の増減・極大極小】

【内容目標】数Ⅱの知識と数Ⅲの知識を合体させいろいろな曲線の極値を求めよう！

□関数の増減 基本数Ⅱと同じ

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能であるとき、平均値の定理により、関数の増減*について次のことが成り立つ。

導関数の符号と関数の増減

- 1 区間 (a, b) で常に $f'(x) > 0$ ならば、
 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で増加する。
- 2 区間 (a, b) で常に $f'(x) < 0$ ならば、
 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で減少する。
- 3 区間 (a, b) で常に $f'(x) = 0$ ならば、
 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数である。

* 区間 I に含まれる任意の 2 数 x_1, x_2 について、
「 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ 」が成り立つとき、
関数 $f(x)$ は区間 I で増加するといひ、
「 $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ 」が成り立つとき、
関数 $f(x)$ は区間 I で減少するという。

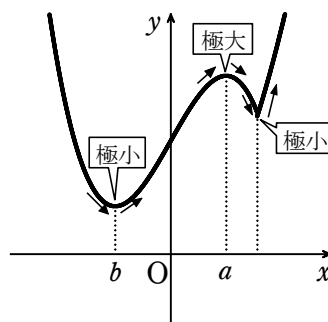
□ 関数の極大と極小 基本数Ⅱと同じ

連続な関数 $f(x)$ が、 $x = a$ を境目として増加から減少に移るとき、 $f(x)$ は $x = a$ で **極大** であるといひ、 $f(a)$ を **極大値** といひ。また、関数 $f(x)$ が、 $x = b$ を境目として減少から増加に移るとき、 $f(x)$ は $x = b$ で **極小** であるといひ、 $f(b)$ を **極小値** といひ。極大値と極小値をまとめて **極値** といひ。

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で微分可能であり、増減が次のようになる場合は、 $f(a)$ が極値である。

x		a	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	極大	↘

x		a	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗



一般に、次が成り立つことが知られている。

極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき

$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば $f'(a) = 0$

ただし、逆は成り立たない。すなわち、

$f'(a) = 0$ であっても、 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとは限らない。

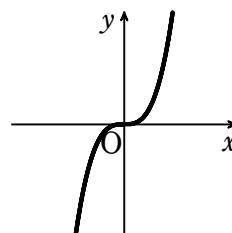
たとえば、関数 $f(x) = x^3$ は、

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ であるが、 $x = 0$ で極値をとらない。

よって、微分可能な関数 $f(x)$ の極値を求めるには、 $f'(x) = 0$ となる x の値を求め、その値の前後における $f'(x)$ の符号を調べる必要がある。

$f(x) = x^3$ の増減表

x		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗



微分の応用【関数の増減・極大極小】

例題) 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y = \frac{x}{x^2+1}$ 商の微分法

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$y' = 0$ とすると

$$-x^2+1=0$$

$$x^2-1=0 \text{ より } (x-1)(x+1)=0 \text{ なので } x=-1, 1$$

分子に注目すると

$$g(x) = -x^2+1 \text{ は上に凸}$$

分母は 2 乗の値なので常に正 なので

x	...	-1	...	1	...
分子	-	0	+	0	-
分母	+	4	+	4	+
y'	-	0	+	0	-

と見ることができる

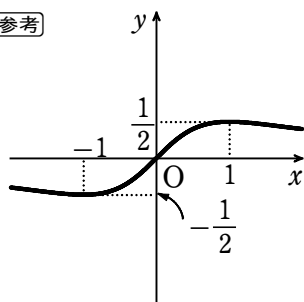
よって, y の増減表は次のようになる。

x		-1		1	
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	極小 $-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	極大 $\frac{1}{2}$	$\searrow$

ゆえに, y は $x=-1$ で極小値 $-\frac{1}{2}$,

$x=1$ で極大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

参考



(2) $y = \sin^2 x + 2\sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

$$y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + 2\sin x$$

$$y' = 0 + \frac{1}{2} \sin 2x \cdot 2 + 2\cos x$$

$$= 2\sin x \cos x + 2\cos x$$

$$= 2\cos x(\sin x + 1)$$

$y' = 0$ とすると,

$$2\cos x(\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0, \sin x = -1$$

$0 < x < 2\pi$ で

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

$$y' = 2\cos x(\sin x + 1) \text{ は}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$\cos x$	1	+	0	-	0	+	1
$\sin x + 1$	1	+	2	+	0	+	1
y'	2	+	0	-	0	+	2

と見ることができる

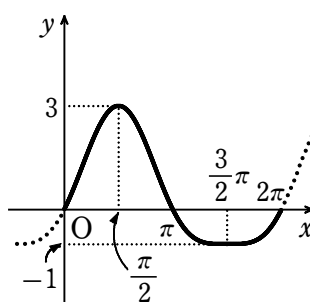
よって y の増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
y'	$\nearrow$	+	0	-	0	+	$\nearrow$
y	0	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	0

ゆえに, y は $x = \frac{\pi}{2}$ で極大値 3,

$x = \frac{3}{2}\pi$ で極小値 -1 をとる。

参考



微分の応用【関数の増減・極大極小】

例題) 次の関数の極値を求めよ。

(3) $y = x^2 \log x$

積の微分法

関数 y の定義域は

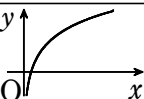
真数条件より $x > 0$ である。

$$y' = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1)$$

$y' = 0$ とすると

$$x \neq 0 \text{ であるから } \log x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{よって対数の定義より } x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$g = 2 \log x + 1$ とすると 

グラフは右のようになる

これに x を掛けることになるので

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	...
x	/	+		+
g	/	-	0	+
y'	/	-	0	+

と見ることができる

ゆえに、 $x > 0$ における y の増減表は

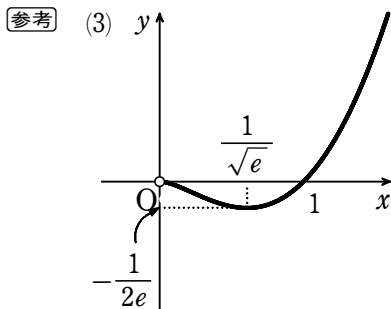
x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
y'	/	-	0	+
y	/	↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

したがって、

$$y \text{ は } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ で極小値 } -\frac{1}{2e} \text{ をとる。}$$

また、極大値はない。

参考



(4) $y = x e^{-x}$

積の微分法

$$y' = e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$$= (1-x)e^{-x}$$

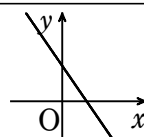
$y' = 0$ とすると

常に $e^{-x} > 0$ であるから、 $x = 1$

$e^{-x} > 0$ であるから

y' の符号は

$1-x$ の符号と一致する



y の増減表は次のようになる。

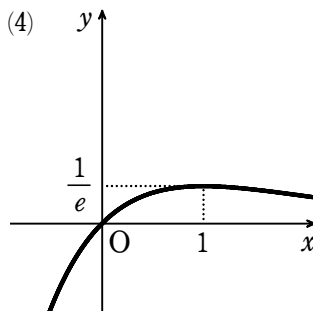
x		1	
y'	+	0	-
y	↗	極大 $\frac{1}{e}$	↘

よって、

y は $x = 1$ で極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。

また、極小値はない。

参考 (4)



微分の応用【関数の増減・極大極小】

関数が $x=a$ で微分可能（なめらか）でなくても、 $x=a$ で極値をとる場合がある。

例題 関数 $f(x)=|x|\sqrt{x+1}$ の極値を求めよ。

方針 絶対値をはずし、それぞれの区間で導関数の符号を調べる。

解答 関数の定義域は $x \geq -1$ である。

○ ≥ 0 のとき $|\bigcirc| = \bigcirc$

積の微分法

i) $x \geq 0$ のとき $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$$x > 0 \text{ において } f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x+1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \left\{ \sqrt{f(x)} \right\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

よって、 $x > 0$ では、 $3x+2 > 0$ 、 $2\sqrt{x+1} > 0$ であるから 常に $f'(x) > 0$

ii) $-1 \leq x < 0$ のとき $f(x) = -x\sqrt{x+1}$

○ < 0 のとき $|\bigcirc| = -\bigcirc$

$$-1 < x < 0 \text{ において } f'(x) = -\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

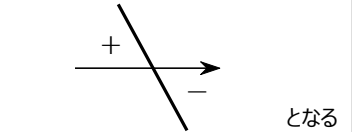
i) の結果を用いる

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -\frac{2}{3} \quad \left(\text{分母} \neq 0 \text{ より (分子)} = 0 \right)$$

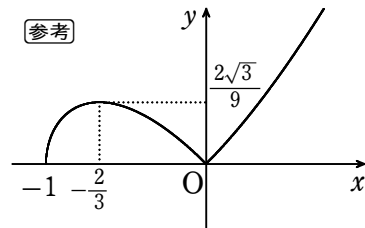
以上から、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

	ii)				i)	
x	-1		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(x)$		+	0	-		+
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗

$g = -(3x+2) = -3x-2$ より
+-はグラフより



参考



よって、 $f(x)$ は

$x = -\frac{2}{3}$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 、 $x = 0$ で極小値 0 をとる。

微分の応用【関数の増減・極大極小】

応用例題) 関数 $f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x-1}$ が $x = -1$ で極値をとるように、定数 a の値を定めよ。

また、このとき、関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

ヒント $f(x)$ は $x = -1$ で微分可能であるから、
 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるならば、 $f'(-1) = 0$ である。

解答 定義域は $x-1 \neq 0$ より $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+a)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ は $x = -1$ で微分可能であるから、

$f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるならば $f'(-1) = 0$

$$\text{すなわち} \quad \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - a}{(-1-1)^2} = \frac{2-a}{4} = 0$$

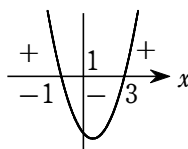
これを解くと、 $a = 2$ となる。

$$\text{このとき} \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

常に $(x-1)^2 \geq 0$ であるから

符号は分子の $(x+1)(x-3)$ できまる



$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x		-1		1		3	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	/	↘	極小 7	↗

よって、 $f(x)$ は $x = -1$ で極値をとり、条件を満たす。

図 $a = 2$, $x = -1$ で極大値 -1 , $x = 3$ で極小値 7

補足 $f'(-1) = 0$ であっても $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるとは限らないため、
 増減表によって、 $x = -1$ で極値をとることを確認している。

微分の応用【第2次導関数とグラフ】

【内容目標】変曲点を調べてより正確なグラフをかくてみよう！

□ 曲線の凹凸

関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。 $f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから、 $f'(x)$ の値の増減は、 $f''(x)$ の符号で調べることができる。また、 $f'(x)$ の値の増減は、接線の傾きの増減を表す。

よって、次のことがいえる。

$f''(x) > 0$ である区間では、 $f'(x)$ の値は増加する。

すなわち、曲線 C の接線の傾きが増加する。

⇒ある区間で、 x の値が増加すると曲線 $y = f(x)$ の

接線の傾きが増加するとき、曲線はこの区間で 下に凸 である

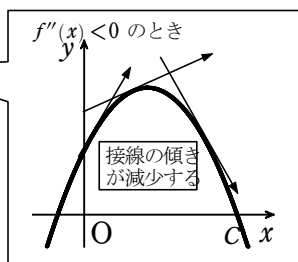
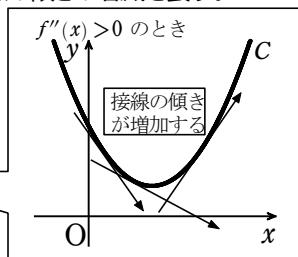
$f''(x) < 0$ である区間では、 $f'(x)$ の値は減少する。

すなわち、曲線 C の接線の傾きが減少する。

⇒ある区間で、 x の値が増加すると曲線 $y = f(x)$ の

接線の傾きが減少するとき、曲線はこの区間で上に凸 である

上で調べたことをまとめると、次のことがいえる。



$f''(x)$ の符号と曲線 $y = f(x)$ の凹凸

関数 $f(x)$ が第2次導関数 $f''(x)$ をもつとき

1 $f''(x) > 0$ である区間では、曲線 $y = f(x)$ は下に凸である。

2 $f''(x) < 0$ である区間では、曲線 $y = f(x)$ は上に凸である。

□ 変曲点

例) 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の凹凸

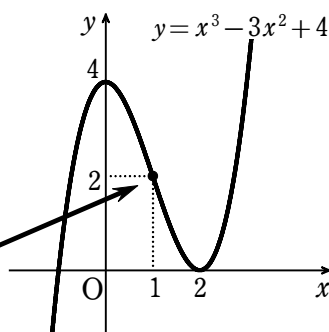
$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1) \rightarrow y'' = 0 \text{ とすると } x = 1$$

y'' の符号を調べて、この曲線の凹凸は、次の表のようになる。

x		1	
y''	-	0	+
y	上に凸	2	下に凸

終



点 (1, 2) を境目として曲線の凹凸が入れかわる。このように、曲線の凹凸が入れかわる境目の点を **変曲点** という。

曲線 $y = f(x)$ の変曲点

$f''(a) = 0$ のとき、 $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば、

点 $(a, f(a))$ は曲線 $y = f(x)$ の **変曲点** である。

微分の応用【第2次導関数とグラフ】

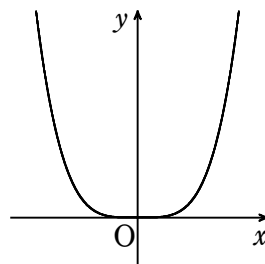
点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば $f''(a)=0$ である。しかし、 $f''(a)=0$ であっても点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるとは限らない（なるときもならないときもある）。

たとえば、関数 $f(x)=x^4$ を考える。

$$f'(x)=4x^3, \quad f''(x)=12x^2$$

より、曲線 $y=f(x)$ の凹凸は、右の表ようになる。

x		0	
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	下に凸	0	下に凸



よって、 $f''(0)=0$ であっても、原点 $(0, 0)$ はこの曲線の変曲点ではない。

例題 次の曲線の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y=x^4+2x^3+1$

(2) $y=xe^{-x}$

(3) $y=x-\cos x \quad (0 < x < \pi)$

(4) $y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

解答 (1) $y'=4x^3+6x^2, \quad y''=12x^2+12x=12x(x+1)$

この曲線の凹凸は、次の表ようになる。

x		-1		0	
y''	+	0	-	0	+
y	下に凸	変曲点 0	上に凸	変曲点 1	下に凸

今回は変曲点だけの話なので
表の中で y' にはふれていない
ので注意

また、変曲点の座標は $(-1, 0), (0, 1)$

(2) $y'=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$$

この曲線の凹凸は、次の表ようになる。

x		2	
y''	-	0	+
y	上に凸	変曲点 $\frac{2}{e^2}$	下に凸

また、変曲点の座標は $(2, \frac{2}{e^2})$

(3) $y'=-4x^3+12x^2-12x+4$

$$y''=-12x^2+24x-12=-12(x^2-2x+1)=-12(x-1)^2$$

この曲線の凹凸は、次の表ようになる。

x		1	
y''	-	0	-
y	上に凸	1	上に凸

また、変曲点はない。

微分の応用【第2次導関数とグラフ】

□グラフのかき方

曲線 $y = f(x)$ の概形をかくときには、次のようなことについて調べると良い。

- | | | |
|-----------------------------|------------------------|----------|
| ① 定義域 | ② 対称性, 周期性 | ③ 増減, 極値 |
| ④ 凹凸, 変曲点 | ⑤ 座標軸との交点などの特別な点 | |
| ⑥ 漸近線 | ⑦ 連続でない点, 微分可能でない点のようす | |
| ⑧ ∞ や $-\infty$ への極限 | | |

例題 関数 $y = e^{-2x^2}$ の増減, グラフの凹凸, 漸近線を調べて, グラフの概形をかけ。

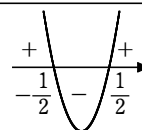
解答 $f(x) = e^{-2x^2}$ とする。

$$f'(x) = -4xe^{-2x^2} \quad \leftarrow -4 \text{ は負, } e^{-2x^2} \text{ は正} \Rightarrow x \text{ で正負が決まる (正負は逆)}$$

$$f''(x) = -4\{e^{-2x^2} + x(-4xe^{-2x^2})\} = 4(4x^2 - 1)e^{-2x^2} \quad \leftarrow 4 \text{ は正, } e^{-2x^2} \text{ は正} \Rightarrow 4x^2 - 1 \text{ で正負が決まる}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は, 次の表のようになる。

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗



$f' + f'' + \Rightarrow \nearrow$,
 $f' + f'' - \Rightarrow \nwarrow$,
 $f' - f'' - \Rightarrow \searrow$,
 $f' - f'' + \Rightarrow \swarrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

補足

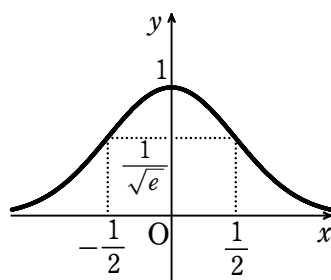
$\nearrow$ は下に凸で増加,
 $\nwarrow$ は上に凸で増加,
 $\searrow$ は上に凸で減少,
 $\swarrow$ は下に凸で減少
 であることを示している。

また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

であるから, x 軸はこの曲線の漸近線である。

以上から, この関数のグラフの概形は, 右の図のようになる。



注意 関数 $f(x) = e^{-2x^2}$ は $f(-x) = f(x)$ を満たすから, 例題のグラフは y 軸に関して対称である。グラフの概形をかくときは, グラフの対称性にも注意するとよい。

微分の応用【第2次導関数とグラフ】

例題) 関数 $y = \frac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ。

解答) 関数の定義域は $x-1 \neq 0$ より $x \neq 1$ である。

漸近線は $x=1$, $y=x+1$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ とすると, } f(x) = x+1 + \frac{1}{x-1} = x+1 + (x-1)^{-1} \text{ であるから}$$

$$f'(x) = 1 - (x-1)^{-2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}, \quad \begin{array}{l} (x-1)^2 \text{ は正} \\ \Rightarrow x(x-2) \text{ で正負が決まる} \end{array}$$

$$f''(x) = 2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x-1)^3} \quad (x-1)^3 \text{ で正負が決まる}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は、次の表のようになる。

x		0		1		2	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	/	+	+	+
$f(x)$	↗	極大 0	↘	/	↘	極小 4	↗

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$$

であるから、直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である。

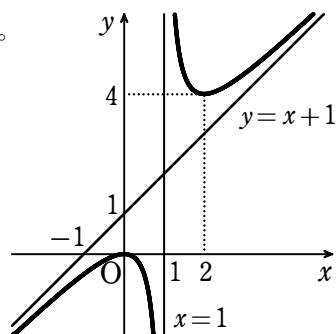
$$\text{さらに, } \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (x+1)\} = \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (x+1)\} = \frac{1}{x-1} = 0$$

であるから、直線 $y=x+1$ もこの曲線の漸近線である。

以上から、このグラフの概形は、

右の図のようになる。



補足) 関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて、 $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ のうち、少なく

とも1つが ∞ または $-\infty$ であるとき、直線 $x=c$ は漸近線である。

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax+b)\} = 0$ または $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (ax+b)\} = 0$ であ

るとき、直線 $y=ax+b$ は漸近線である。

微分の応用【第2次導関数とグラフ】

例題) 関数 $y = x - 2\sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) のグラフの概形

$$y' = 1 - 2\cos x, \quad y'' = 2\sin x$$

$0 < x < 2\pi$ の範囲で, $y' = 0$ となる x は $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

また, $y'' = 0$ となる x は $x = \pi$

よって, y の増減, グラフの凹凸は, 次の表のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5}{3}\pi$		2π
y'	$\nearrow$	-	0	+	+	+	0	-	$\searrow$
y''	$\nearrow$	+	+	+	0	-	-	-	$\searrow$
y	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	2π

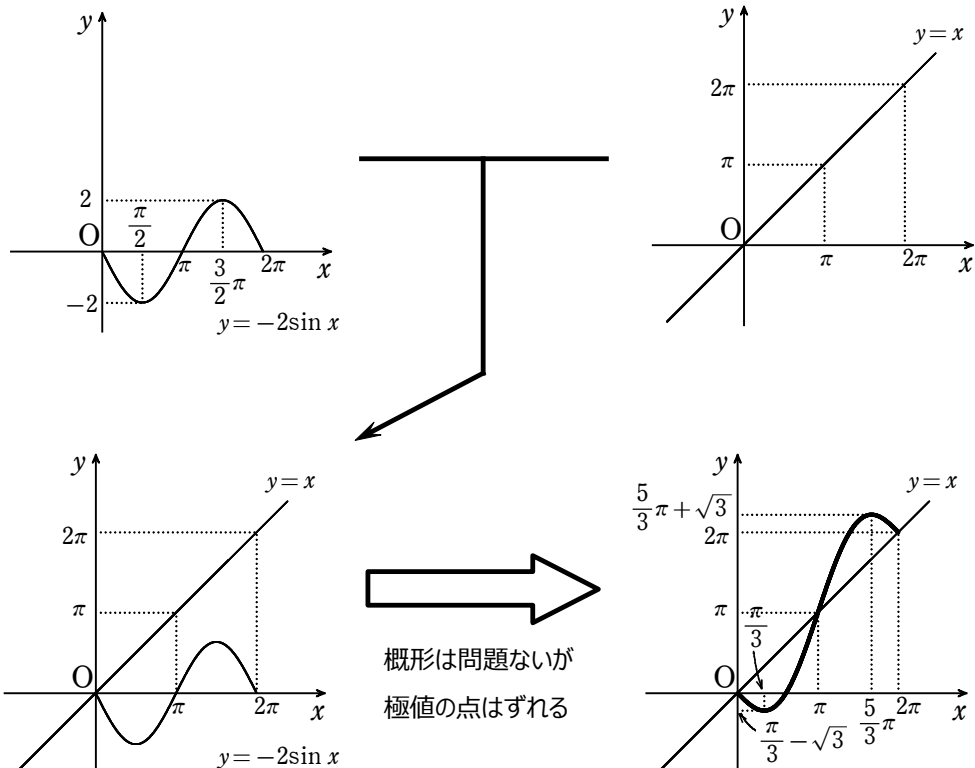
ゆえに, y は

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ で極小値 } \frac{\pi}{3} - \sqrt{3},$$

$$x = \frac{5}{3}\pi \text{ で極大値 } \frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}$$

をとる。

以上により, グラフの概形は図のようになる。



微分の応用【第2次導関数とグラフ】

□第2次導関数と極値

第2次導関数を利用して、極値を判定することを考えてみよう。

第2次導関数と極値

$x = a$ を含むある区間で $f''(x)$ は連続であるとする。

- 1 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば、 $f(a)$ は極小値である。
- 2 $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば、 $f(a)$ は極大値である。

1の証明 $f''(a) > 0$ のとき、 $f''(x)$ は連続であるから、

$x = a$ の十分近くでは $f''(x) > 0$ で、

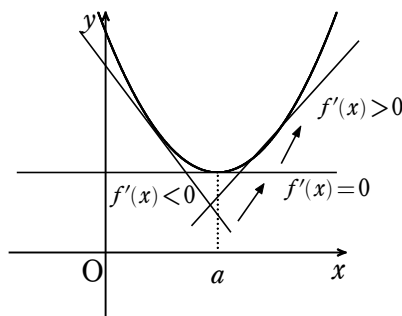
$f'(x)$ は単調に増加する。

$f'(a) = 0$ であるから $x < a$ では $f'(x) < 0$

$x > a$ では $f'(x) > 0$

よって、 $f(a)$ は極大値である。 終

2についても、同様に示すことができる。



x		a	
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	↘	極小	↗

【注意】 $f''(a) = 0$ のときは、

$f(a)$ が極値である場合も、

極値でない場合もある。

【例題】 第2次導関数を利用して、次の関数の極値を求めよ。

$$f(x) = \sqrt{3}x + 2\cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

解説

$$f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin x, \quad f''(x) = -2\cos x$$

$$0 < x < \pi \text{ で } f'(x) = 0 \text{ となる } x \text{ は } x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 < 0 \text{ であるから、}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 1 \text{ は極大値}$$

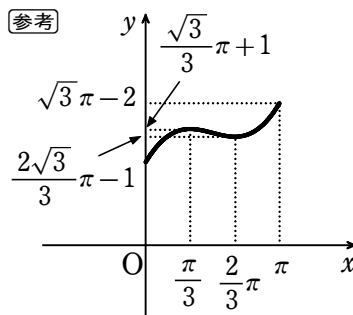
$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1 > 0 \text{ であるから、}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - 1 \text{ は極小値}$$

$$\text{よって、} f(x) \text{ は } x = \frac{\pi}{3} \text{ で極大値 } \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 1,$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ で極小値 } \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi - 1 \text{ をとる。}$$

参考



微分の応用【最大・最小】

【内容目標】増減表から最大・最小を読み取ろう！

例題) 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y = (1 + \sin x) \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

積の微分法

解答

$$y' = \cos x \cdot \cos x + (1 + \sin x) \cdot (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$= -2\sin^2 x - \sin x + 1$$

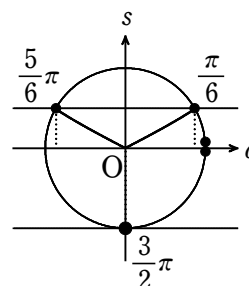
$$= -(2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

$0 < x < 2\pi$ において， $y' = 0$ となる x の値は

$$-(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \quad \text{より}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \sin x = -1$$

$$\text{より} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$



y の増減表は次のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$2\sin x - 1$		-	0	+	0	-		-	
$\sin x + 1$		+		+		+	0	+	
y'		+	0	-	0	+	0	+	
y	1	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0	↗	1

よって， y は

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ で最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad x = \frac{5}{6}\pi \text{ で最小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる。

微分の応用【最大・最小】

例題) $AB=AC$, $\angle BAC=2\theta$ である二等辺三角形 ABC が、半径 1 の円 O に内接している。 θ が変化するとき、この三角形の周の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ。

解答 $\triangle ABC$ において

$$AB=AC=2OA\cos\theta=2\cos\theta$$

$$BC=2AB\sin\theta=4\sin\theta\cos\theta$$

$\triangle ABC$ の周の長さを y とすると

$$y=4\cos\theta+4\cos\theta\sin\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

積の微分法

よって

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$y'=-4\sin\theta+4(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$=-4\sin\theta+4(1-2\sin^2\theta)$$

$$=-4(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)$$

$$=-4(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$$

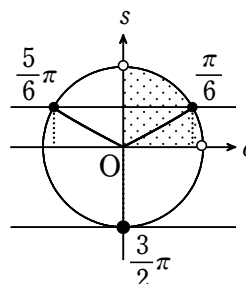
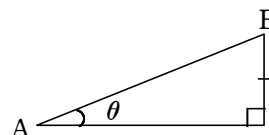
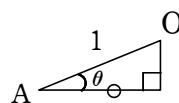
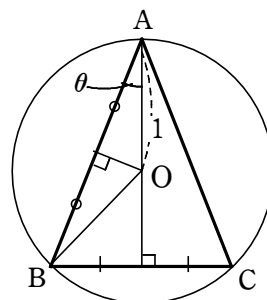
$$y'=0 \text{ となるのは } \sin\theta=\frac{1}{2} \text{ または } \sin\theta=-1$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \text{ なので, } \theta=\frac{\pi}{6} \text{ のときである。}$$

また、 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において、 y の増減表は次のようになる。

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\sin\theta-1$		-		+	
$\sin\theta+1$		+		+	
y'		+	0	-	
y		↗	極大 $3\sqrt{3}$	↘	

したがって、 y は $\theta=\frac{\pi}{6}$ で最大値 $3\sqrt{3}$ をとる。



微分の応用【方程式・不等式への応用】

【内容目標】微分法を用いて不等式を証明したり方程式の個数を調べよう

□不等式の証明

数Ⅱと同様

例題 3) $x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$e^x > 1 + x$$

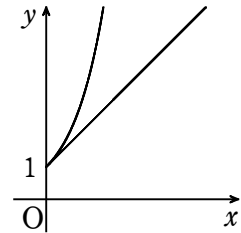
証明 $f(x) = e^x - (1 + x)$ とおくと $f'(x) = e^x - 1$

$x > 0$ のとき、 $e^x > 1$ であるから $f'(x) > 0$

よって、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で単調に増加する。

このことと、 $f(0) = 0$ から、 $x > 0$ のとき $f(x) > 0$

したがって、 $x > 0$ のとき $e^x > 1 + x$ 終



注意 更に、任意の自然数 n に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

e^x の方が大きくなる
スピードが速い

となることが知られている。これは $y = e^x$ が $x \rightarrow \infty$ のとき $y = x^n$ と比較して、より急速に増大することを意味している。

□方程式の実数解の個数

数Ⅱと同様

応用例題 4) a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

a を分離させる

解 $\frac{e^x}{x} = a$ より

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ となる x は

$x = 1$ であるから、

$f(x)$ の増減表は上のようになる。また

$$e^x = ax$$

$y = \frac{e^x}{x}$ と $y = a$ の交点
の個数の話を持っていく

x		0		1	
e^x	+	1	+	e	+
$x-1$	-	-1	-	0	+
x^2	+	/	+	1	+
$f'(x)$	-	/	-	0	+
$f(x)$	↘	/	↘	極小 e	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

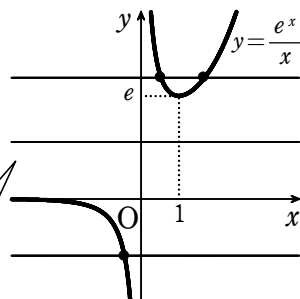
このグラフと直線 $y = a$ の共有点を考えて、求める実数解の個数は、次のようになる。

$a > e$ のとき 2 個

$a = e, a < 0$ のとき 1 個

$0 \leq a < e$ のとき 0 個

$y = a$ (横線)を
動かして共有点の
個数を考える

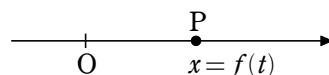


微分の応用【速度・加速度】

【内容目標】微分をいろいろなことに活用してみよう

□直線上の点の運動

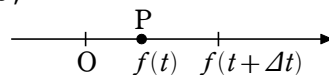
数直線上を運動する点 P の座標 x が、時刻 t の関数として



$$x = f(t)$$

と表されるとする。このとき、時刻 t から $t + \Delta t$ までの 平均速度 は、

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



で表される。

この平均速度において、 $\Delta t \rightarrow 0$ のときの極限値を、時刻 t における点 P の **速度** という。速度を v で表すと

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

である。P は、 $v > 0$ のとき数直線上を正の向きに動き、 $v < 0$ のとき負の向きに動く。また、 v の絶対値 $|v|$ を、点 P の **速さ** という。

さらに、速度 v の時刻 t における変化率を、点 P の **加速度** という。加速度を α で表すと、次のようになる。

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

以上のことをまとめると、次のようになる。

速度と加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x = f(t)$

で表されるとき、時刻 t における P の速度 v 、加速度 α は

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t),$$

1 回微分したら
『速度』

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

2 回微分したら
『加速度』

例) 数直線上を運動する点 P の座標 x が、時刻 t の関数として、 $x = 2\sin(\pi t - b)$ で

表されるとき、時刻 t における P の速度 v 、加速度 α を求めよ。

ただし、 b は定数とする。

【解答】 速度 v は $v = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos(\pi t - b)$

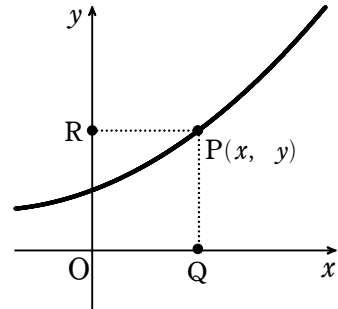
加速度 α は $\alpha = \frac{dv}{dt} = -2\pi^2 \sin(\pi t - b)$

【補足】 例の点 P の運動を**単振動**という。 α は $\alpha = -\pi^2 x$ とも表される。

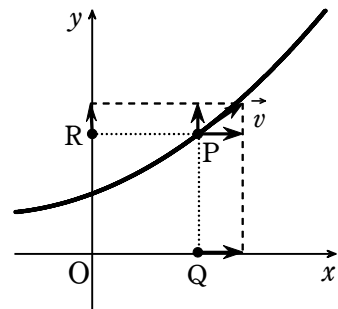
微分の応用【速度・加速度】

□平面上の点の運動

時刻 t における点 P の座標を (x, y) とすると, x, y は t の関数となる。このとき, P から x 軸, y 軸に下ろした垂線を, それぞれ PQ, PR とすると, 点 Q は x 軸上を, 点 R は y 軸上を動く。したがって, 時刻 t における点 Q の速度は $\frac{dx}{dt}$, 点 R の速度は $\frac{dy}{dt}$ である。



これらを, それぞれ点 P の x 軸方向の速度, y 軸方向の速度
 といい, これらを成分とするベクトル $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ を,
 時刻 t における点 P の **速度** という。



座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における x 座標,

y 座標が t の関数であるとき, P の速度 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$

を, 右の図のように $\vec{v} = \overrightarrow{PT}$ とすると, 直線 PT の傾きは $\frac{dy}{dx}$

である。

よって, 直線 PT は, P の描く曲線の P における接線である。

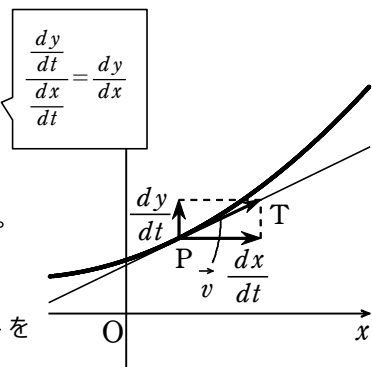
速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を, 点 P の **速さ** という。

さらに, x 軸方向の加速度 $\frac{d^2x}{dt^2}$, y 軸方向の加速度 $\frac{d^2y}{dt^2}$ を

成分とするベクトル $\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$ を, 時刻 t における点 P の **加速度** という。また, 加速度 $\vec{\alpha}$

の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を, 点 P の **加速度の大きさ** という。

これまでのことをまとめると, 次のようになる。



速度と加速度

座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t における x 座標,

y 座標が t の関数であるとき, 時刻 t における P の速度 $\vec{v}$,

速さ $|\vec{v}|$, 加速度 $\vec{\alpha}$, 加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2}$$

微分の応用【速度・加速度】

例3) 座標平面上を運動する点 P の座標 (x, y) が, 時刻 t の関数として

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t \quad (r, \omega \text{ は正の定数})$$

で表されるとき, 時刻 t における P の速さ, 加速度の大きさを求めよ。

【解答】 時刻 t における P の速度を $\vec{v}$, 加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$$\vec{v} \text{ の成分は } \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t$$

よって, 速さ $|\vec{v}|$ は

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = r\omega \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha} \text{ の成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -r\omega^2 \sin \omega t$$

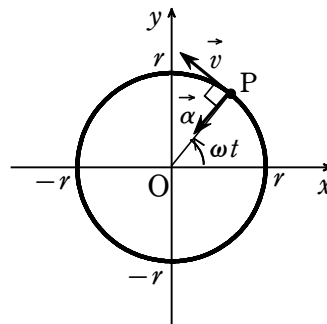
よって, 加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha}| &= \sqrt{(-r\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-r\omega^2 \sin \omega t)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)} = r\omega^2 \end{aligned}$$

例3の点 P は円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上を動く。この円運動の速さは $r\omega$ であるから一定である。このように, 速さが一定の円運動を **等速円運動** という。

また, 例題3 では $\vec{\alpha} = -\omega^2(x, y)$ と表される。

一般に, 等速円運動する点 P の加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは, P から円の中心に向かう向きであり, $\vec{\alpha}$ は速度 $\vec{v}$ に垂直である。



微分の応用【近似式】

□ 近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、微分係数 $f'(a)$ は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

で定義される。よって、 h が 0 に十分近い値のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \doteq f'(a)$ であると考えてよい。

両辺に h をかけて $f(a+h) - f(a) \doteq f'(a) \times h \quad \therefore f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$

これは、 h が 0 に十分近い値のとき、 $f(a+h)$ の値を h の 1 次式で近似する式となっている。

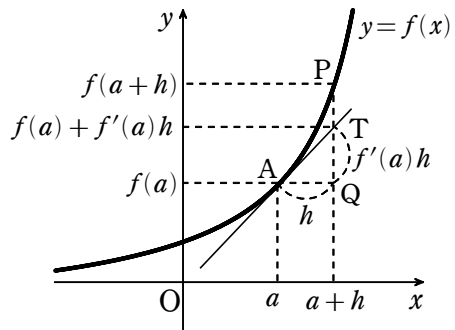
1 次の近似式

h が 0 に十分近いとき $h \doteq 0$ のとき $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$

上の近似式の意味を、グラフで考えてみよう。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の方程式は $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ と表される。

よって、 $h \doteq 0$ のとき、右の図において、点 P の y 座標を点 T の y 座標で近似するということである。



また、「1 次の近似式」で、とくに $a=0$ のときを考え、 h を x におき換えると、次の近似式が得られる。

$x \doteq 0$ のときの 1 次の近似式

x が 0 に十分近いとき $x \doteq 0$ のとき $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$

例 4) h が 0 に近いとき、 $f(x)=x^p$ (p は実数) の近似式を考えてみよう。

$$f'(x)=px^{p-1} \text{ であるから } (a+h)^p \doteq a^p + pa^{p-1}h$$

$$\text{とくに } a=1 \text{ とおけば } (1+h)^p \doteq 1 + ph$$

例) この近似式を用いて、 $\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を求めよ。

$$\sqrt[3]{1.006} = (1+0.006)^{\frac{1}{3}} \text{ であるから}$$

$$\sqrt[3]{1.006} \doteq 1 + \frac{1}{3} \times 0.006 = 1.002$$

$$h=0.006 \quad p=\frac{1}{3}$$

例 5) $h \doteq 0$ のとき、 $\sin(a+h)$ の 1 次の近似式は $(\sin x)' = \cos x$ であるから、

$$h \doteq 0 \text{ のとき } \sin(a+h) \doteq \sin a + h \cos a$$

例) $(\sin x)' = \cos x$ であるから、 $x \doteq 0$ のとき

$$\sin x \doteq \sin 0 + (\cos 0) \cdot x$$

$$\text{すなわち } \sin x \doteq x$$

$y = \sin x$ と $y = x$ は
0 の近くでは似た形

