

平面上の曲線【2次曲線】

□放物線

平面上で、定点 F からの距離と、 F を通らない定直線 l からの距離が等しい点の軌跡を **放物線** といい、この点 F を放物線の **焦点**、直線 l を放物線の **準線** という。

点 $F(p, 0)$ を焦点とし、直線 $x = -p$ を準線 l とする放物線の方程式を求めてみよう。
ただし、 $p \neq 0$ とする。

この放物線上の点を $P(x, y)$ とし、 P から l に下ろした垂線を PH とすると、 P がこの放物線上にあるのは、
 $PF = PH$ すなわち $PF^2 = PH^2$ のときである。

$$\text{よって } (x - p)^2 + y^2 = \{x - (-p)\}^2$$

$$\text{整理して } y^2 = 4px \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

逆に、 $\textcircled{1}$ を満たす点 $P(x, y)$ は $PF = PH$ を満たす。

$\textcircled{1}$ を放物線の方程式の **標準形** という。また、放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を、放物線の **軸** といい、軸と放物線の交点を、放物線の **頂点** という。放物線は、その軸に関して対称である。

放物線の標準形 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)

4 をくり出すのを
忘れずに

1 焦点は 点 $(p, 0)$ 、準線は 直線 $x = -p$

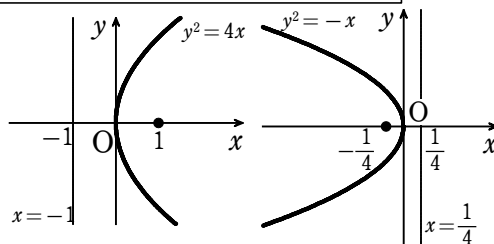
2 軸は x 軸、頂点は原点 O 3 曲線は x 軸に関して対称

例) 焦点が点 $(1, 0)$ で、準線が直線 $x = -1$

である放物線の方程式は

$$y^2 = 4 \cdot 1 \cdot x \quad \text{すなわち} \quad y^2 = 4x$$

図



例) 放物線 $y^2 = -x$ について、

$y^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)x$ であるから、焦点は 点 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ で、準線は直線 $x = \frac{1}{4}$ である。

図

□ y 軸が軸となる放物線

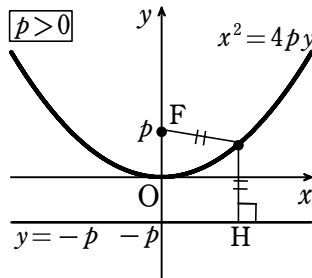
$p \neq 0$ とする。点 $F(0, p)$ を焦点とし、直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は、前ページと同様にして求めると、次のようになる。

$$x^2 = 4py$$

4 をくり出すのを忘れずに
 $y =$ にすればいつもの形

放物線 $y = ax^2$ は、 $x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a}y$ と表されるから、

その焦点は点 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 、準線は直線 $y = -\frac{1}{4a}$ である。



平面上の曲線【2次曲線】

□楕円

平面上で、2 定点 F, F' からの距離の和が一定である点の軌跡を **楕円** といい、この 2 点 F, F' を楕円の **焦点** という。

2 点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求めよう。ただし、 $FF' < 2a$ であることが必要なので、 $a > c > 0$ とする。

この楕円上の点を $P(x, y)$ とすると、 P が楕円上にあるのは

$PF + PF' = 2a$ のときであるから

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

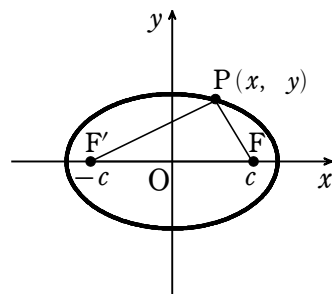
両辺を 2 乗して整理すると

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

再び両辺を 2 乗して整理すると $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$a > c$ であるから、 $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおくと、 $a > b > 0$ であり $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

よって $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ …… ①



両辺を a^2b^2 で割る。

逆に、① を満たす点 $P(x, y)$ は $PF + PF' = 2a$ を満たす。

① を楕円の方程式の **標準形** という。

① を導くのに $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおいたから、 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ である。このことから、楕円 ① の焦点 F, F' の座標は、次のようになる。

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

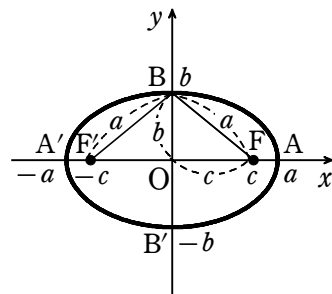
楕円 ① と x 軸および y 軸の交点

$$A(a, 0), A'(-a, 0) \quad B(0, b), B'(0, -b)$$

を、楕円 ① の **頂点** という。頂点を結ぶ線分 AA', BB' のうち、長い方の AA' を **長軸**、短い方の BB' を **短軸** という。

焦点は長軸上にある。また、長軸と短軸の交点 O を、楕円の **中心** という。

楕円 ① は、長軸 AA' 、短軸 BB' に関して対称である。さらに、中心 O に対しても対称である。



楕円の標準形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

- 1 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- 2 楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$ ($PF + PF' = 2a$)
- 3 長軸の長さは $2a$ 、短軸の長さは $2b$
- 4 曲線は x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称

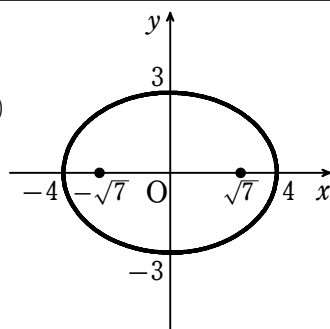
平面上の曲線【2次曲線】

例) 楕円 $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

焦点は, $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ より 2点 $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$

長軸の長さは $2 \cdot 4 = 8$

短軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$ 終



例題4) 2点 $(4, 0), (-4, 0)$ を焦点とし,
焦点からの距離の和が10である楕円の方程式を求めよ。

解答 求める方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) とおける。

焦点からの距離の和について, $2a = 10$ であるから $a = 5$

焦点の座標について, $\sqrt{a^2 - b^2} = 4$ であるから両辺を2乗して $a^2 - b^2 = 16$

$$b^2 = a^2 - 16 = 25 - 16 = 9$$

したがって, 求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

□焦点が y 軸上にある楕円

方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ …… ①

において, $b > a > 0$ の場合, ① は右の図のような楕円を表す。

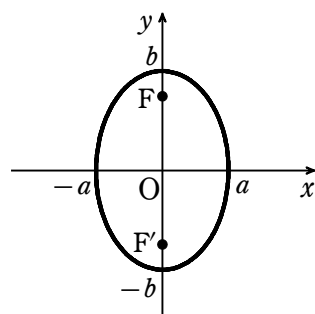
この楕円の2つの焦点 F, F' は y 軸上にあり,
座標は次のようになる。

$$F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$$

この楕円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2b$ である。

また, 長軸は y 軸上, 短軸は x 軸上にある。

長軸の長さは $2b$, 短軸の長さは $2a$ である。



平面上の曲線【2次曲線】

□円と楕円

円 $x^2 + y^2 = r^2$ を, x 軸をもとにして y 軸方向に縮小または拡大すると, どのような曲線になるか調べてみよう。

例題 1) 円 $x^2 + y^2 = 25$ を, x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{3}{5}$ 倍して得られる図形 (曲線の方程式) は, どのような曲線か。

円上に点 $Q(s, t)$ をとり, Q が移る点を $P(x, y)$ とすると

$$s^2 + t^2 = 5^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \begin{array}{|l} \text{Qは円周上の点} \end{array}$$

$$x = s, \quad y = \frac{3}{5}t \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \begin{array}{|l} y \text{ 軸方向に } \frac{3}{5} \text{ 倍} \end{array}$$

② より

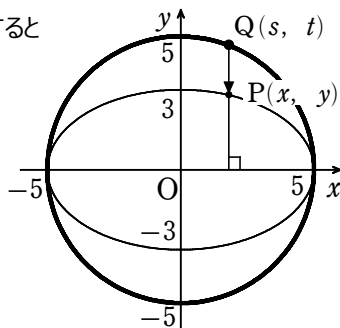
$$s = x, \quad t = \frac{5}{3}y \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③ を ① に代入すると

$$x^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 = 5^2$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ゆえに, 求める曲線は, 楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ である。 (終)



一般に, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は,

円 $x^2 + y^2 = a^2$ を, x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である。

補足 円は楕円の特別な場合であると考えることができる。

平面上の曲線【2次曲線】

□点の軌跡が楕円になる場合

応用例題 2)

座標平面上において、長さ7の線分 AB がある。点 A が x 軸上、点 B が y 軸上を動くとき、AB を 3 : 4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

方針 動点を $A(s, 0)$, $B(0, t)$, 連動点(軌跡を求める点)を $P(x, y)$ として s, t を x, y で表し, s, t の満たす式に代入する。

解答 点 A の座標を $(s, 0)$, 点 B の座標を $(0, t)$ とすると, $AB=7$ から

$$s^2 + t^2 = 7^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 P の座標を (x, y) とすると, P は線分 AB を 3 : 4 に内分するから

$$x = \frac{4}{7}s, \quad y = \frac{3}{7}t$$

注意 図から比率を確認

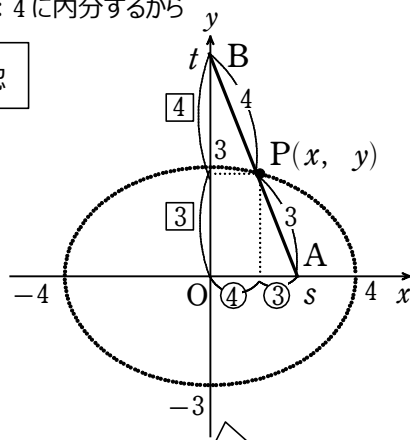
すなわち $s = \frac{7}{4}x, \quad t = \frac{7}{3}y$

これらを ① に代入すると

$$\left(\frac{7}{4}x\right)^2 + \left(\frac{7}{3}y\right)^2 = 7^2$$

すなわち $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

よって, 点 P は楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上にある。



$s=0$ のときや
 $t=0$ など極端なところを
考えると概形がわかる

逆に, この楕円上のすべての点 $P(x, y)$ は, 条件を満たす。

したがって, 求める軌跡は, 楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ である。

軌跡の問題は
逆についても触れておく
(必要条件・十分条件
どちらも成り立つことを確認する)

平面上の曲線【2次曲線】

□双曲線の方程式

平面上で、2 定点 F, F' からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡を **双曲線** といい、この 2 点 F, F' を双曲線の **焦点** という。

2 点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの**距離の差**が $2a$ である双曲線の方程式を求めてみよう。ただし、 $FF' > 2a$ であることが必要なので、 $c > a > 0$ とする。

この双曲線上の点を $P(x, y)$ とすると、 P が双曲線上にあるのは

$PF - PF' = \pm 2a$ のときであるから

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

再び両辺を 2 乗して整理すると

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$c > a$ であるから、 $\sqrt{c^2 - a^2} = b$ とおくと、 $b > 0$ であり $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$\text{よって } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

逆に、 $\textcircled{1}$ を満たす点 $P(x, y)$ は $PF - PF' = \pm 2a$ を満たす。

$\textcircled{1}$ を双曲線の方程式の **標準形** という。

$\textcircled{1}$ を導くのに $\sqrt{c^2 - a^2} = b$ とおいたから、 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。

このことから、双曲線 $\textcircled{1}$ の**焦点** F, F' の座標は、次のようになる。

$$F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

ここで、2 直線 $y = x, y = -x$ が双曲線 $x^2 - y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ の**漸近線**であることを示そう。

双曲線 $\textcircled{1}$ の概形は、右の図のようになり、 x 軸、 y 軸に関して

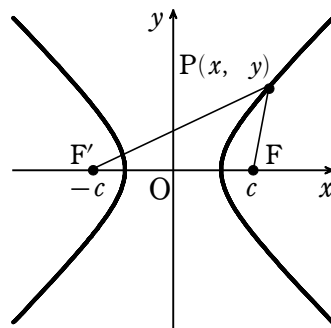
対称である。したがって、双曲線 $\textcircled{1}$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分について調べればよい。

双曲線 $\textcircled{1}$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分は、関数

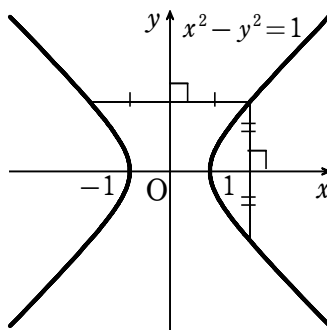
$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \geq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

のグラフである。 $x \geq 1$ においては

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 - 1} &= \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} > 0 \end{aligned}$$



上の式の両辺を a^2b^2 で割る



平面上の曲線【2次曲線】

②のグラフ上の点 $P(x, y)$ が原点から限りなく遠ざかると、 x は限りなく大きくなる。このとき、 $x + \sqrt{x^2 - 1}$ も限りなく大きくなるから、 $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ は 0 に限りなく近づく。

したがって、 x と $\sqrt{x^2 - 1}$ の差も 0 に限りなく近づくから、点 P は、原点から限りなく遠ざかるとき、直線 $y = x$ に限りなく近づく。すなわち、直線 $y = x$ は、双曲線 ① の漸近線である。

また、②のグラフと直線 $y = x$ を x 軸に関して折り返すことにより、直線 $y = -x$ も双曲線 ① の漸近線であることがわかる。

さらに、双曲線 ① は y 軸に関して対称であるから、 $x \leq 0$ の部分についても、2 直線 $y = x$ 、 $y = -x$ は漸近線であることがわかる。

一般の双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の概形は、右の図ようになる。

前ページと同様に、関数 $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ ($x \geq a$)

のグラフなどを考えると、次の 2 直線が漸近線であることがわかる。

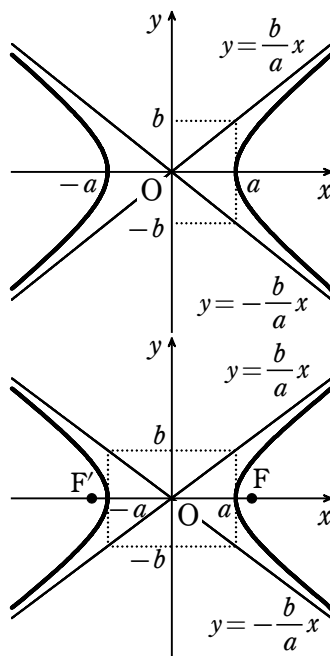
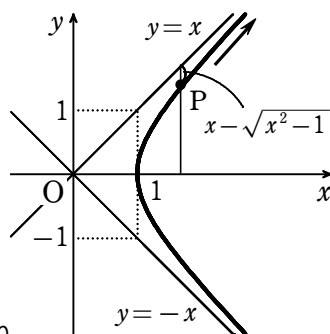
$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

双曲線の焦点 F 、 F' を通る直線 FF' と双曲線の交点を、双曲線の **頂点** という。また、線分 FF' の中点を、双曲線の **中心** という。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、

頂点は 2 点 $(a, 0)$ 、 $(-a, 0)$ で、中心は原点 O である。

また、この双曲線は、 x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称である。



双曲線の標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

- 1 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 、 $(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$
- 2 双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$ ($|PF - PF'| = 2a$)
- 3 漸近線は 2 直線 $y = \frac{b}{a}x$ 、 $y = -\frac{b}{a}x$
- 4 曲線は x 軸、 y 軸、原点 O に関して対称

補足 2 本の漸近線の方程式は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ 、 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ と表すことができる。

平面上の曲線【2次曲線】

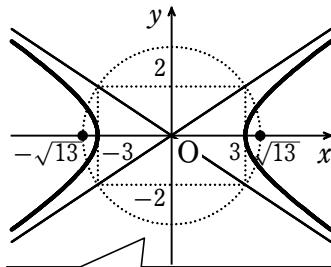
例) 双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

焦点は、 $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ より

2点 $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$

頂点は 2点 $(3, 0), (-3, 0)$

漸近線は 2直線 $y = \frac{2}{3}x, y = -\frac{2}{3}x$ 終



分母の値を用いて
長方形と円を補う
焦点、頂点、漸近線が見えてくる

例6) 2点 $(4, 0), (-4, 0)$ を焦点とし、

2点からの距離の差が6である双曲線の方程式を求めてみよう。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおくと $2a = 6, \sqrt{a^2 + b^2} = 4$

よって $a = 3$ であり $3^2 + b^2 = 4^2$ より $b^2 = 7$ ($b > 0$ より $b = \sqrt{7}$) であるから

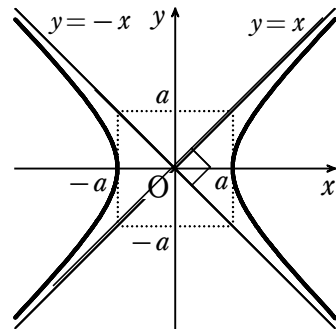
求める方程式は $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 終

一般に、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ の漸近線は

2直線 $y = x, y = -x$ であり、これらは直角に交わる。

このように、直角に交わる漸近線をもつ双曲線を

直角双曲線 という。



双曲線 $xy = 1$ ($y = \frac{1}{x}$) は直角双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を
原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転したのになっていることが
わかるから、双曲線 $xy = 1$ は直角双曲線であるといえる

問14) 2点 $(4, 0), (-4, 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

直角双曲線なので $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > 0$) とおくと

焦点の x 座標より $\sqrt{a^2 + a^2} = 4$

両辺を2乗して $2a^2 = 16 \quad \therefore a^2 = 8$

$a > 0$ より $a = 2\sqrt{2}$

したがって $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

平面上の曲線【2次曲線】

□焦点が y 軸にある双曲線

次の方程式の表す曲線について調べてみよう。

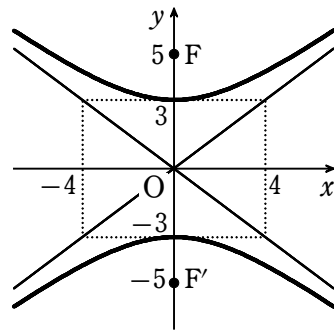
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

よって、 $\textcircled{1}$ は、 $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ において、

x と y を入れかえたものである。このことから、

曲線 $\textcircled{1}$ は右の図のような双曲線であるといえる。



一般に、 $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \boxed{-1}$ の表す曲線も双曲線である。

符号に注目！

この双曲線について、次のことがいえる。

焦点は 2点 $(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, $(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$

頂点は 2点 $(0, b)$, $(0, -b)$

漸近線は 2直線 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

双曲線上の点から2つの焦点までの距離の差は $2b$

問15) 次の双曲線の頂点と焦点および漸近線を求め、その概形をかけ。

$$(1) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

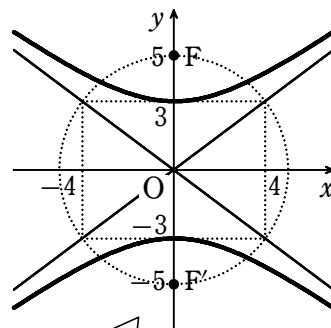
$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1 \text{ より}$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ であるから}$$

頂点 $(0, 3)$, $(0, -3)$

焦点 $(0, 5)$, $(0, -5)$

漸近線 $y = \pm \frac{3}{4}x$



長方形と円を補うと
焦点、頂点、漸近線が見えてくる

これまでに学んだ放物線、楕円、双曲線および円は、 x , y の2次方程式で表される。これらの曲線をまとめて **2次曲線** という。

平面上の曲線【2次曲線】

Column

円錐曲線

1つの直線 ℓ と1点 O で交わる直線 ℓ' が ℓ のまわりに空間内で回転するとき、 ℓ' のえがく面を円錐面といいます。

ℓ をその円錐面の軸， O を頂点， ℓ' を母線といいます。

円錐面は頂点によって2つの部分に分けられます。

頂点を通らない平面 α で円錐面を切るとき、その切り口は α と円錐面の交わり方によって、次のような曲線となります。

円錐をその頂点 O を通らない平面 α で切った切り口の曲線は、

α が母線に平行であるとき、放物線

α が母線に平行でなく、

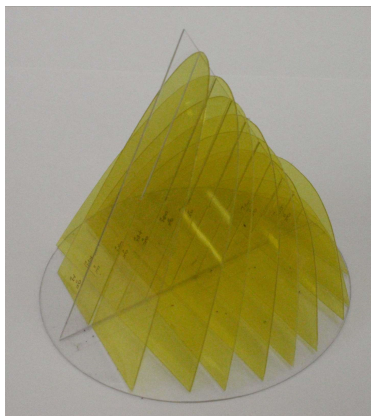
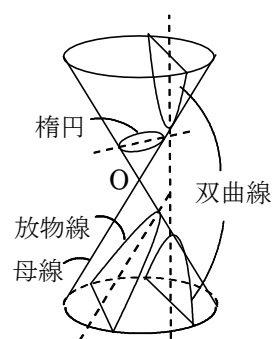
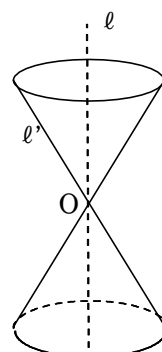
円錐の一方とだけ交わるとき、円または楕円

α が母線に平行でなく、両方の円錐と交わるとき、双曲線

となります。

このように、2次曲線は、円錐を平面で切った切り口の曲線であることが知られています。

このことから、これらの2次曲線を **円錐曲線** ともいいます。



平面上の曲線【2次曲線の平行移動】

□ 2次曲線の平行移動

楕円，双曲線，放物線などは，いずれも x, y の方程式 $f(x, y)=0$ の形で表される。

一般に， x, y の方程式 $f(x, y)=0$ が与えられたとき，この方程式が曲線を表すならば，この曲線を 方程式 $f(x, y)=0$ の表す曲線，または 曲線 $f(x, y)=0$ という。

また，方程式 $f(x, y)=0$ を，この 曲線の方程式 という。

ここは数学 I の復習です

方程式 $f(x, y)=0$ の表す曲線 C を， x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線 C' の方程式を求めてみよう。

C' 上に任意の点 $P(x, y)$ をとり，この平行移動によって P に移される C 上の点を $Q(X, Y)$ とすると

$$x = X + p, \quad y = Y + q$$

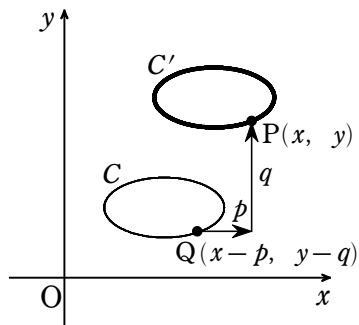
すなわち $X = x - p, \quad Y = y - q$

点 Q は C 上にあるから

$$f(X, Y)=0$$

この式の X に $x - p$ ， Y に $y - q$ を代入すると $f(x - p, y - q)=0$

これが，曲線 C' の方程式である。



曲線 $f(x, y)=0$ の平行移動

曲線 $f(x, y)=0$ x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$f(x - p, y - q)=0$$

例) 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ …… ①

を， x 軸方向に 2， y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる楕円の方程式は

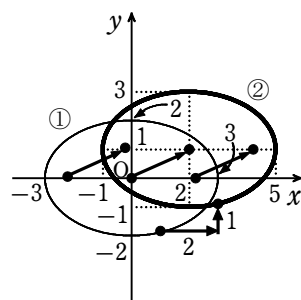
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \quad \dots\dots ②$$

である。

また，楕円 ① の焦点は 2 点 $(\sqrt{5}, 0)$ ， $(-\sqrt{5}, 0)$ であるから，楕円 ② の焦点は，楕円 ① の焦点を

x 軸方向に 2， y 軸方向に 1 だけ移動して，次のようになる。

$$2 \text{ 点 } (\sqrt{5} + 2, 1), (-\sqrt{5} + 2, 1) \quad \text{終}$$



移動後の式から求めるのではなく，点を移動させるイメージで

平面上の曲線【2次曲線の平行移動】

□ $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ の表す図形

例で得られた楕円の方程式 $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ …… ②

の分母を払って整理すると、次のようになる。

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0 \quad \dots\dots ③$$

逆に、方程式 ③ が与えられたとき、これを ② の形に変形して、その表す図形を調べることができる。

例題) 曲線 $y^2 - 6y - 4x - 7 = 0$ は放物線であることを示し、その概形をかけ。

また、頂点と焦点、および準線を求めよ。

解答 与えられた方程式を平方完成すると

$$(y-3)^2 - 9 - 4x - 7 = 0$$

$$(y-3)^2 = 4x + 16$$

4 をくり出す！

すなわち $(y-3)^2 = 4(x+4)$ …… ①

この曲線は、放物線 $y^2 = 4x$ を

x 軸方向に -4 、 y 軸方向に 3 だけ

平行移動した放物線である。

また、 $y^2 = 4x$ の頂点は原点、

焦点は点 $(1, 0)$ 、

準線は直線 $x = -1$ であるから、

放物線 ① の頂点、焦点、準線は、

これらを x 軸方向に -4 、

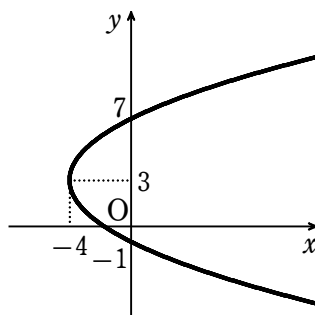
y 軸方向に 3 だけ平行移動して、次のようになる。

頂点は点 $(-4, 3)$ 、

焦点は点 $(-3, 3)$ 、

準線は直線 $x = -5$

よって、その概形は図のようになる。



点の移動は足し算

関数の移動は置き換え

頂点 $(0, 0)$

$$\Rightarrow (0 + (-4), 0 + 3)$$

$$\Rightarrow (-4, 3)$$

焦点 $(1, 0)$

$$\Rightarrow (1 + (-4), 0 + 3)$$

$$\Rightarrow (-3, 3)$$

準線 $x = -1$

$$\Rightarrow x - (-4) = -1$$

$$x = -5$$

平面上の曲線【2次曲線の平行移動】

例題) 次の方程式はどのような図形を表すか。また、その概形をかけ。

$$4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 56 = 0$$

解 この方程式を平方完成する

$$4x^2 - 16x - 9y^2 - 36y - 56 = 0$$

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 4y) = 56$$

$$4[(x-2)^2 - 4] - 9[(y+2)^2 - 4] = 56$$

$$4(x-2)^2 - 16 - 9(y+2)^2 + 36 = 56$$

$$4(x-2)^2 - 9(y+2)^2 = 36$$

よって

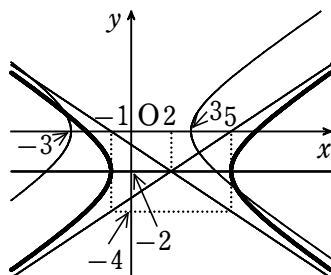
$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

この曲線は、双曲線

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

漸近線 $y = \pm \frac{2}{3}x$ の交点（原点）を
平行移動させればかける

を x 軸方向に 2, y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線で、その概形は上の図のようになる。



例題) 次の方程式 $9x^2 + 4y^2 - 18x - 24y + 9 = 0$ はどのような図形を表すか。

また、その概形をかけ。

解答 与えられた方程式を平方完成すると

$$9x^2 - 18x + 4y^2 - 24y + 9 = 0$$

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 6y) = -9$$

$$9[(x-1)^2 - 1] + 4[(y-3)^2 - 9] = -9$$

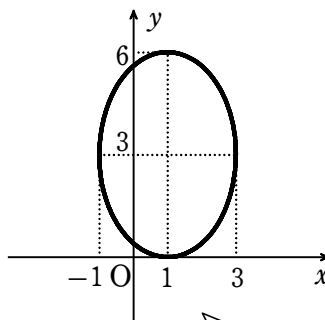
$$9(x-1)^2 - 9 + 4(y-3)^2 - 36 = -9$$

すなわち $9(x-1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$

よって $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

この曲線は、楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を

x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円で、
その概形は図のようになる。



中心を平行移動
→短軸, 長軸をとって
楕円を描く

平面上の曲線【2次曲線と直線】

例題) 放物線 $y^2=4x$ と直線 $2x-y=4$ の共有点の座標を求めよ。

解答

$$y^2=4x \quad \cdots \cdots ①$$

$$2x-y=4 \quad \cdots \cdots ② \quad \text{とする。}$$

基本は連立方程式

$$② \text{ から } y=2x-4$$

$$\text{これを } ① \text{ に代入すると } (2x-4)^2=4x$$

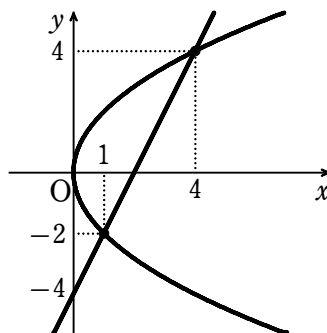
$$\text{整理すると } x^2-5x+4=0$$

$$\text{すなわち } (x-1)(x-4)=0$$

$$\text{これを解いて } x=1, 4$$

$$x=1 \text{ のとき } y=-2 \quad x=4 \text{ のとき } y=4$$

よって、求める共有点の座標は $(1, -2), (4, 4)$



例題) k は定数とする。楕円 $x^2+4y^2=20$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を調べよ。

解答

$$x^2+4y^2=20 \quad \cdots \cdots ①$$

$$y=x+k \quad \cdots \cdots ②$$

とする。② を ① に代入すると

$$x^2+4(x+k)^2=20$$

$$x^2+4(x^2+2kx+k^2)=20$$

$$\text{整理すると } 5x^2+8kx+4k^2-20=0$$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(4k)^2-5(4k^2-20)=16k^2-20k^2+100$$

$$=-4k^2+100$$

$$=-4(k^2-25)$$

$$=-4(k+5)(k-5)$$

よって、楕円 ① と直線 ② の共有点の個数は、次のようになる。

$$D>0 \text{ より } -4(k+5)(k-5)>0 \quad \therefore (k+5)(k-5)<0$$

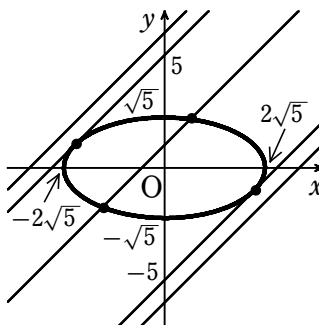
$$\text{すなわち } -5<k<5 \quad \text{のとき} \quad \text{共有点は2個}$$

$$D=0 \text{ より } -4(k+5)(k-5)=0 \quad \therefore (k+5)(k-5)=0$$

$$\text{すなわち } k=\pm 5 \quad \text{のとき} \quad \text{共有点は1個}$$

$$D<0 \text{ より } -4(k+5)(k-5)<0 \quad \therefore (k+5)(k-5)>0$$

$$\text{すなわち } k<-5, 5<k \text{ のとき} \quad \text{共有点は0個}$$



平面上の曲線【2次曲線と直線】

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は、 $y_1 y = 2p(x + x_1)$ で与えられることを示そう。

【解答】 $y^2 = 4px$ …… ① より $x = \frac{y^2}{4p}$

$y_1 y = 2p(x + x_1)$ …… ② から x を消去すると

$$y_1 y = 2p\left(\frac{y^2}{4p} + x_1\right)$$

$$y^2 - 2y_1 y + 4px_1 = 0 \quad \text{…… ③}$$

点 P は放物線 ① 上にあるから $y_1^2 = 4px_1$

よって③に代入すると $y^2 - 2y_1 y + y_1^2 = 0$

すなわち $(y - y_1)^2 = 0$

したがって、2次方程式③は重解 $y = y_1$ をもち、直線②は、点 $P(x_1, y_1)$ における放物線①の接線である。

次の楕円上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式を求めてみよう。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{…… ①}$$

[1] 点 P が x 軸上にないとき、 P における楕円①の接線の方程式を $y = m(x - x_1) + y_1$ …… ②

とおく。②を①に代入して整理し、定数項を k とすると

$$(a^2 m^2 + b^2)x^2 - 2a^2 m(m x_1 - y_1)x + k = 0 \quad \text{…… ③}$$

直線②は、 P において楕円①に接するから、 $x = x_1$ は2次方程式③の重解である。

$$\text{よって } x_1 = \frac{a^2 m(m x_1 - y_1)}{a^2 m^2 + b^2}$$

m について解くと、 P は x 軸上にないから、 $y_1 \neq 0$ で $m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

これを②に代入して整理すると $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

$P(x_1, y_1)$ は楕円①上にあるから $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

したがって、接線の方程式は $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

[2] 点 P が x 軸上にあるときも、接線はこの方程式で与えられる。

同様に、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は、

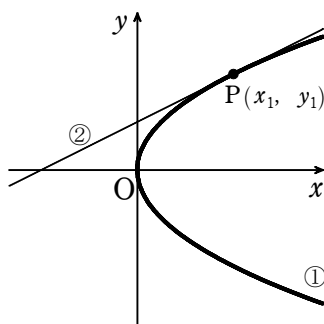
$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ となることがわかる。

【曲線の接線の方程式】

放物線 $y^2 = 4px$ の接線の方程式は $y_1 y = 2p(x + x_1)$

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の接線の方程式は $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の接線の方程式は $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$



数Ⅱで学んだ
円の接線の方程式の
覚え方が流用できる
 $x^2 + y^2 = r^2$
 $\Rightarrow x \cdot x + y \cdot y = r^2$
 $\Rightarrow x_1 x + y_1 y = r^2$

平面上の曲線【2次曲線と直線】

例題) 点 A(0, 3) から楕円 $x^2 + 2y^2 = 2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答 $x^2 + 2y^2 = 2$ …… ① とする。

点 A(0, 3) から楕円 ① に引いた接線で、y 軸に平行な接線は存在しない。

よって、接線の傾きを m とすると、接線の方程式は

$$y = mx + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表される。② を ① に代入すると

$$x^2 + 2(mx + 3)^2 = 2$$

整理すると $(2m^2 + 1)x^2 + 12mx + 16 = 0$

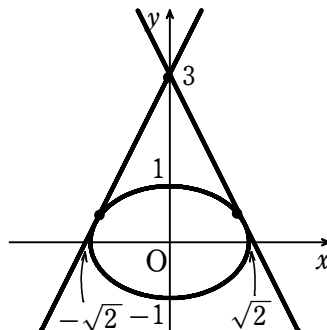
この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (6m)^2 - (2m^2 + 1) \cdot 16 = 4(m^2 - 4)$$

直線 ② が楕円 ① に接するための必要十分条件は、 $D = 0$ であるから

$$m^2 - 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = \pm 2$$

よって、接線の方程式は $y = 2x + 3, \quad y = -2x + 3$



別解 接点を (a, b) とすると 楕円 $x^2 + 2y^2 = 2$ に引いた接線の方程式は

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ より } \frac{ax}{2} + by = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ とおける}$$

これが 点 A(0, 3) を通るので $3b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{3}$

また 接点は楕円 $x^2 + 2y^2 = 2$ 上に存在するので $a^2 + 2b^2 = 2$

これに $b = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$a^2 + \frac{2}{9} = \frac{18}{9}$$

$$a^2 = \frac{16}{9}$$

$$\therefore a = \pm \frac{4}{3}$$

したがって求める接線は③より

$$a = \frac{4}{3} \text{ のとき } \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad \text{つまり} \quad y = -2x + 3$$

$$a = -\frac{4}{3} \text{ のとき } -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad \text{つまり} \quad y = 2x + 3$$

平面上の曲線【2次曲線と離心率】

放物線は、点 P から焦点 F までの距離 PF と、準線 l までの距離 PH が等しい点 P の軌跡として定義された。楕円や双曲線も、放物線の場合と同様に、1 つの焦点と 1 つの直線をもとに考えることができる。

例題) 点 F(4, 0) からの距離と、直線 $x=1$ からの距離の比が

2 : 1 である点 P の軌跡は、双曲線であることを示せ。

また、点 F(4, 0) は、その双曲線の焦点の 1 つであることを確かめよ。

解答 点 P の座標を (x, y) ,

点 P から直線 $x=1$ に下ろした垂線を PH とする。

P の満たす条件は $PF : PH = 2 : 1$

これより $2PH = PF$ すなわち $4PH^2 = PF^2$

$PH^2 = (x-1)^2$, $PF^2 = (x-4)^2 + y^2$ を代入すると

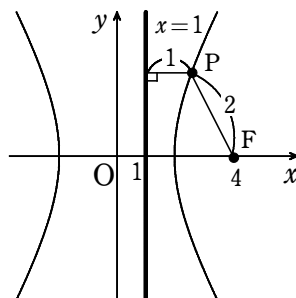
$$4(x-1)^2 = (x-4)^2 + y^2 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 - y^2 = 12 \quad \text{よって} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに、条件を満たす点 P は双曲線 ① 上にある。逆に双曲線 ① 上の任意の点は条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ である。

また、 $\sqrt{4+12} = 4$ から、焦点の座標は 2 点 (4, 0), (-4, 0)

よって、点 F(4, 0) はこの双曲線の焦点の 1 つである。



例題) 点 F(2, 0) からの距離と、直線 $x = \frac{1}{2}$ からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

解答 点 P の座標を (x, y) , 点 P から直線 $x = \frac{1}{2}$ に下ろした垂線を PH とする。

P の満たす条件は $PF : PH = 2 : 1$

これより $2PH = PF$ すなわち $4PH^2 = PF^2$

$PH^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, $PF^2 = (x-2)^2 + y^2$ を代入すると

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (x-2)^2 + y^2 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 - y^2 = 3$$

$$\text{よって} \quad x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに、条件を満たす点 P は、双曲線 ① 上にある。

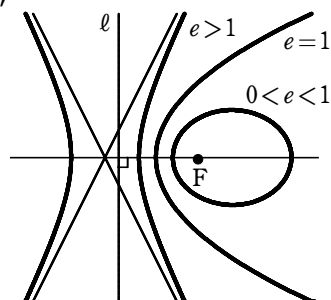
逆に、双曲線 ① 上の任意の点は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ である。

平面上の曲線【2次曲線と離心率】

一般に、定点 F からの距離と、
 F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e : 1$ である点 P の軌跡は、
 e の値によって次のようになる。

$0 < e < 1$ のとき	F を焦点の1つとする楕円
$e = 1$ のとき	F を焦点、 ℓ を準線とする放物線
$e > 1$ のとき	F を焦点の1つとする双曲線



この e の値を、2次曲線の **離心率** といい、

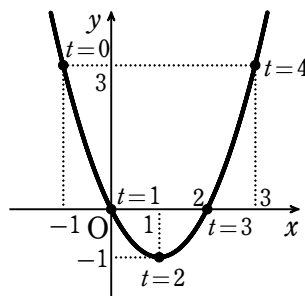
直線 ℓ を **準線** という。

【補足】 e が 0 に近いほど、点 P の軌跡は円に近づく。

平面上の曲線【曲線の媒介変数表示】

□ 曲線の媒介変数表示

点 P の座標 x, y が変数 t によって $x=t-1, y=t^2-4t+3$ で表されるとき、例えば t を $0, 1, 2, 3, 4$ とすると、 P の座標は、それぞれ $(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0), (3, 3)$ となる。これらの点を座標平面上にとることによって、点 P の軌跡をかくことができる。



第1式 $x=t-1$ を t について解くと $t=x+1$

これを $y=t^2-4t+3$ に代入すると $y=(x+1)^2-4(x+1)+3$

よって、上でかいた曲線は関数 $y=x^2-2x$ のグラフである。

一般に、平面上の曲線 C が1つの変数、例えば t によって $x=f(t), y=g(t)$ の形に表されたとき、これを曲線 C の **媒介変数表示** または **パラメータ表示** という。

また、変数 t を **媒介変数** または **パラメータ** という。

【注意】曲線 C の媒介変数による表示の仕方は、一通りではない。

問1) 次の媒介変数 t を消去して、 x, y の関係式を求めよ。

$$(1) \begin{cases} x=2t-3 \\ y=-t+5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=t^2-1 \\ y=-2t \end{cases}$$

$t=-y+5$ なので

$x=2(-y+5)-3$

$x=-2y+10-3$

$2y=-x+7$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

$t=-\frac{y}{2}$ なので

$x=\left(-\frac{y}{2}\right)^2-1$

$\therefore x=\frac{1}{4}y^2-1$

□ 一般角 θ を用いた円の媒介変数表示

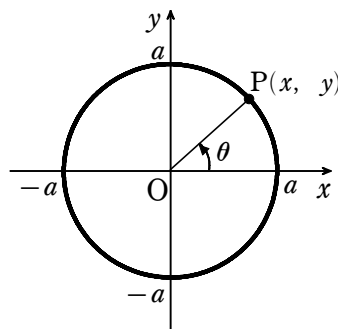
原点 O を中心とする半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ …… ①

上の点を $P(x, y)$ とし、動径 OP の表す一般角を θ とすると、

三角関数の定義から $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$

ただし、 θ は弧度法で表した角とする。

これは、円 ① の媒介変数表示である。



問2) 円 $x^2+y^2=25$ の媒介変数表示を求めよ。

原点 O を中心とする半径 5 の円であるので $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases}$

【参考】戻すときは $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入する

平面上の曲線【曲線の媒介変数表示】

□楕円の媒介変数表示

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ …… ② 上の点 $Q(x, y)$ に対し、

$X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$ とおくと $P(X, Y)$ は

円 $X^2 + Y^2 = 1$ 上にあるから、円の媒介変数表示を用いて

$$\frac{x}{a} = \cos \theta, \quad \frac{y}{b} = \sin \theta$$

と表される。したがって、楕円 ② の媒介変数表示は次のようになる。

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta$$

問 3) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ の媒介変数表示を求めよ。

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ であるので } \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$$

□双曲線の媒介変数表示

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ …… ① について三角関数を用いた媒介変数表示を考えてみよう。

$$\text{三角関数について } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1$$

$$\text{が成り立つから } x = \frac{1}{\cos \theta}, \quad y = \tan \theta \quad \dots\dots ②$$

とおくと、点 $P(x, y)$ は双曲線 ① 上にある。

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ であるから } \frac{1}{\cos \theta} \leq -1, \quad 1 \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

また、 $\tan \theta$ は任意の実数値をとる。よって、角 θ が動くと、② で与えられる点 $P(x, y)$ は双曲線 ① 上の点すべてを動く。したがって、双曲線 ① の媒介変数表示は、② で与えられる。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ …… ③ の媒介変数表示を考えてみよう。

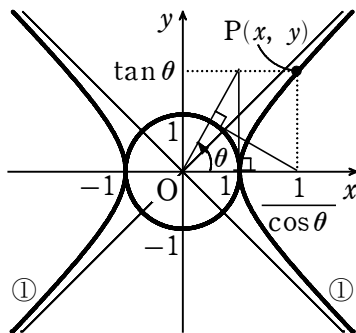
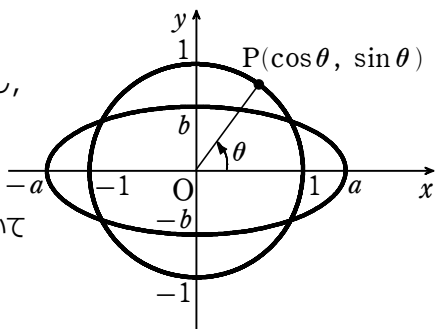
双曲線 ③ 上の点 $Q(x, y)$ に対し、 $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$ とおくと、 $P(X, Y)$ は

双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ 上にあるから、双曲線 ① の媒介変数表示 ② を用いて

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \frac{y}{b} = \tan \theta$$

と表される。したがって、双曲線 ③ の媒介変数表示は次のようになる。

$$x = \frac{a}{\cos \theta}, \quad y = b \tan \theta$$



平面上の曲線【曲線の媒介変数表示】

問5) 放物線 $y = -x^2 + 2tx + 1$ の頂点 P は、 t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。

P を (x, y) とする。放物線の方程式を変形すると

$$y = -(x - 2tx) + 1$$

$$y = -\{(x - t)^2 - t^2\} + 1$$

$$y = -(x - t)^2 + 1 + t^2$$

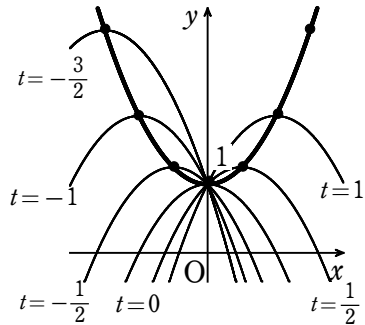
よって、放物線の頂点 P の座標は $(t, 1 + t^2)$

ゆえに、点 P が描く曲線は、 t を媒介変数として

$$x = t, \quad y = 1 + t^2$$

と表される。これらから t を消去すると $y = x^2 + 1$

したがって、頂点 P は、放物線 $y = x^2 + 1$ を描く。

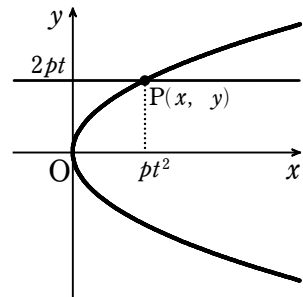


【参考】直線群と媒介変数表示

放物線 $y^2 = 4px$ を媒介変数を用いて表してみよう。

直線 $y = 2pt$ を考える。 t の値が変化するとき、これらの直線は x 軸に平行な直線群を表し、各直線 $y = 2pt$ と放物線の交点を $P(x, y)$ とすると $x = pt^2, y = 2pt$

これは、放物線 $y^2 = 4px$ の媒介変数表示である。



次に、円 $x^2 + y^2 = 1$ …… ① の場合を考えてみよう。

点 $A(-1, 0)$ を通る傾き t の直線

$$y = t(x + 1) \quad \dots\dots ②$$

を考える。円 ① と直線 ② の、 A と異なる交点を $P(x, y)$ とし、

① と ② から y を消去すると $(x^2 - 1) + t^2(x + 1)^2 = 0$

左辺を因数分解して $(x + 1)\{x - 1 + t^2(x + 1)\} = 0$

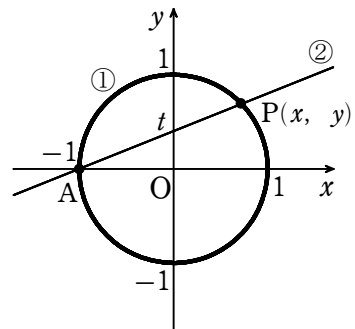
すなわち $(x + 1)\{(1 + t^2)x + t^2 - 1\} = 0$

$x \neq -1$ であるから $(1 + t^2)x + t^2 - 1 = 0$

よって $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

したがって $y = t\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1 + t^2}$

これは、円 ① から点 A を除いた部分の媒介変数表示である。



平面上の曲線【曲線の媒介変数表示】

□媒介変数で表された曲線の平行移動

一般に、媒介変数で表された曲線の平行移動について、次のことが成り立つ。

曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ の平行移動

曲線 $x = f(t)$, $y = g(t)$ を, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の媒介変数表示は

$$x = f(t) + p, \quad y = g(t) + q$$

問6) 次の媒介変数表示は、どのような曲線を表すか。

$$(1) \begin{cases} x = 3 \cos \theta + 2 \\ y = 3 \sin \theta - 3 \end{cases}$$

$$3 \cos \theta = x - 2, \quad 3 \sin \theta = y + 3$$

より

$$\sin \theta = \frac{y+3}{3}, \quad \cos \theta = \frac{x-2}{3}$$

である。これを

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

に代入して

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

よって

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$$

したがって、点 $(2, -3)$ を中心とする
半径 3 の円を表す。

$$(2) \begin{cases} x = 3 \cos \theta - 2 \\ y = 5 \sin \theta + 2 \end{cases}$$

$$3 \cos \theta = x + 2, \quad 5 \sin \theta = y - 2$$

より

$$\sin \theta = \frac{y-2}{5}, \quad \cos \theta = \frac{x+2}{3}$$

である。これを

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

に代入して

$$\frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$$

したがって、

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ を}$$

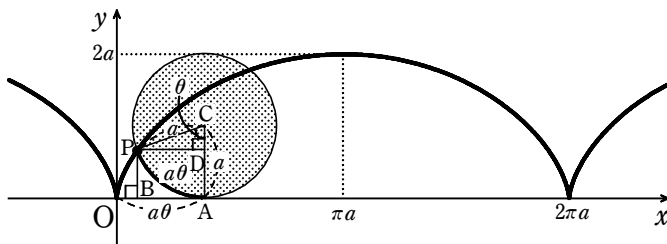
x 軸方向に -2 ,

y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円

平面上の曲線【曲線の媒介変数表示】

□サイクロイド

円が定直線に接しながら、すべることなく回転するとき、円周上の定点 P が描く曲線を サイクロイド という。



円の半径が a のとき、サイクロイドの媒介変数表示を求めてみよう。

上の図のように、定直線を x 軸、点 P の初めの位置を原点 O とし、中心 C の円が角 θ だけ回転して、 x 軸に点 A で接する位置にきたとき、すなわち $\angle PCA = \theta$ となったときの P の座標を (x, y) とする。このとき図において、弧 AP の長さを $\widehat{AP}$ で表すと

$$OA = \widehat{AP} = a\theta$$

であるから、上の図のように、点 D, B を定めると

$$x = OB = OA - BA = a\theta - a\sin\theta$$

$$y = BP = AD = AC - DC = a - a\cos\theta$$

よって、サイクロイドの媒介変数表示は、次のようになる。

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

【研究】□三角関数の媒介変数表示

円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y > 0$ の部分を C とする。 C 上の点 P と点 R $(-1, 0)$ を結ぶ直線 PR と y 軸の交点を Q とし、その座標を $(0, t)$ とする。点 P の座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とする。 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ。

点 P は $y > 0$ の範囲にあるから $\sin\theta > 0$ よって、以下、 $0 < \theta < \pi$ として考える。

$$\text{このとき } \angle PRO = \frac{\theta}{2}$$

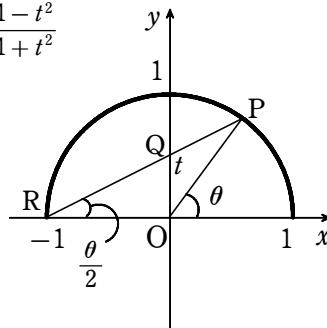
また、 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ より、 $\tan \frac{\theta}{2}$ が定義され、 $\tan \frac{\theta}{2} = t (> 0)$ となる。

$$\text{ゆえに } \cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1 + t^2)^2}}$$

$$t > 0 \text{ であるから } \sin\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$



平面上の曲線【極座標と極方程式】

□極座標

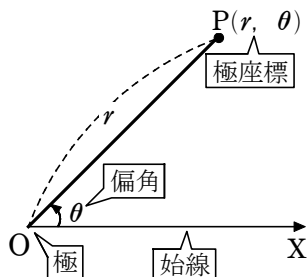
これまで平面上の点の座標は x 座標と y 座標の組 (x, y) で表してきた。ここでは、平面上の点の座標の別な表し方について考えてみよう。

平面上に点 O と半直線 OX を定めると、この平面上の任意の点 P の位置は、 OP の長さ r と、 OX から半直線 OP へ測った角 θ で決まる。

このとき、2つの数の組 (r, θ) を点 P の **極座標** といい、定点 O を **極**、半直線 OX を **始線**、角 θ を **偏角** という。

極 O の極座標は、 θ を任意の数として $(0, \theta)$ と定める。

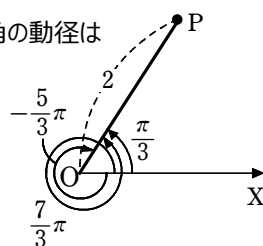
なお、 θ は弧度法で表した一般角である。



極座標が与えられると、その点はただ1つに定まる。しかし、ある1つの点を与えられたとき、その点の極座標は1通りには定まらない。例えば、 $\frac{\pi}{3}, \frac{7}{3}\pi, -\frac{5}{3}\pi$ などの角の動径は

一致するから、極座標が $(2, \frac{\pi}{3}), (2, \frac{7}{3}\pi), (2, -\frac{5}{3}\pi)$

である点は同じ点を表す。



一般に、極座標では、 n を整数とするととき、

(r, θ) と $(r, \theta + 2n\pi)$ は同じ点を表すから、ある点 P の極座標は1通りには定まらない。

しかし、極 O と異なる点 P の極座標 (r, θ) は、例えば、 θ の値の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ と制限すると、ただ1通りに定まる。

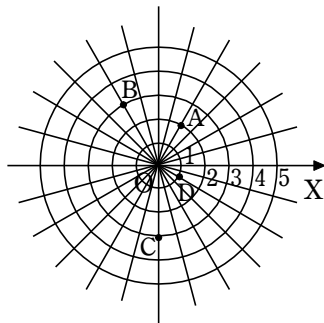
例) 極座標で表された4点

$$A\left(2, \frac{\pi}{3}\right), B\left(3, \frac{2}{3}\pi\right), C\left(3, \frac{3}{2}\pi\right), D\left(1, -\frac{\pi}{6}\right)$$

を図示すると、右の図のようになる。

図

(大きさ・距離, 偏角)



練習) 極座標で表された次の点の位置を図に記せ。

(1) $E\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

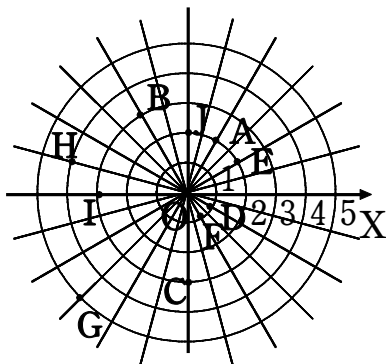
(2) $F\left(1, \frac{5}{3}\pi\right)$

(3) $G\left(5, \frac{5}{4}\pi\right)$

(4) $H\left(4, \frac{11}{12}\pi\right)$

(5) $I(3, -\pi)$

(6) $J\left(2, \frac{5}{2}\pi\right)$

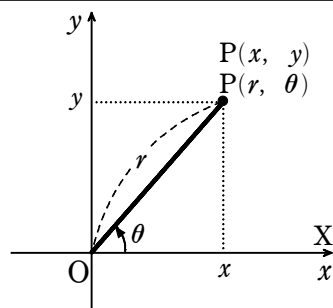


解答

平面上の曲線【極座標と極方程式】

□ 極座標と直交座標の関係

極座標に対し、これまで用いてきた x 座標, y 座標の組 (x, y) で表した座標を **直交座標** という。座標平面において極座標を考える場合、普通、原点 O を極、 x 軸の正の部分を開始線とする。この場合、点 P の極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には、次の関係がある。



極座標と直交座標

$$1 \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$2 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \neq 0 \text{ のとき } \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

例) 極座標が $(2, \frac{\pi}{4})$ である点 P の直交座標 (x, y) を求めよ。

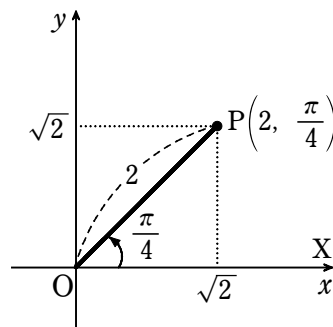
$r = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$ であるから

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

よって、 P の直交座標は

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{終}$$



例) 直交座標が $(-1, \sqrt{3})$ である点 P の極座標 (r, θ) を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$x = -1, y = \sqrt{3}$ であるから

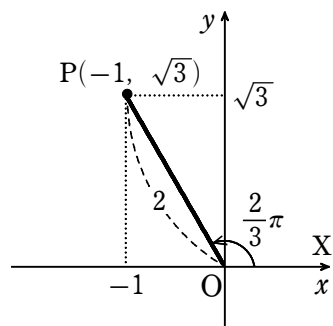
$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

よって、 P の極座標は $(2, \frac{2}{3}\pi)$



平面上の曲線【極座標と極方程式】

□極方程式

ある曲線が極座標 (r, θ) に関する方程式 $r=f(\theta)$ や $F(r, \theta)=0$ で表されるとき、この方程式を曲線の **極方程式** という。

例) 極 O を中心とする半径 2 の円の極方程式

円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

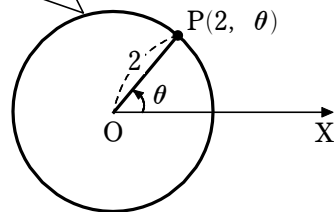
$$r=2, \theta \text{ は任意の値}$$

よって、この円の極方程式は

$$r=2$$

偏角 θ に指定がない
⇒触れなくて良い

偏角 θ の大きさを変えると円ができてがる



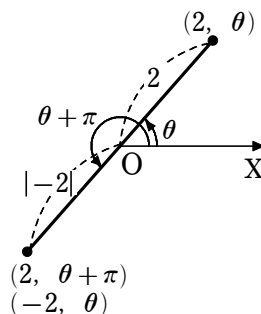
極方程式においては、 $r < 0$ の極座標の点も考える。

すなわち、 $r > 0$ のとき、極座標が $(-r, \theta)$ である点は、

極座標が $(r, \theta + \pi)$ である点と考える。

例えば、 $(-2, \theta)$ と $(2, \theta + \pi)$ は同じ点を表し、

この点は点 $(2, \theta)$ と極 O に関して対称である。



例) 極 O を通り、始線とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ の直線の極方程式

この直線上の点 P の極座標を

(r, θ) とすると

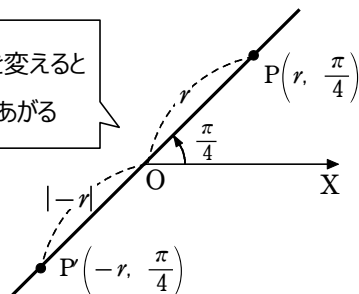
$$r \text{ は任意の値}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

よって、この直線の極方程式は

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

距離 r に制限がない
⇒触れなくて良い

r の大きさを変えると
直線ができてがる



例) 極方程式 $r = \frac{1}{\cos \theta}$ は

$$r \cos \theta = 1$$

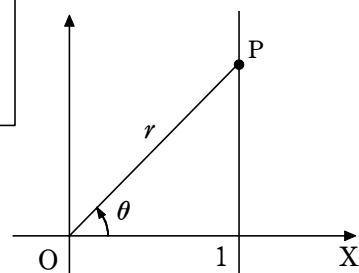
例 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ なので } r=2$$

すなわち $x=1$ と変形されるから

直線 $x=1$ を表す

終



平面上の曲線【極座標と極方程式】

例) 中心 A の極座標が $(a, 0)$ で、半径が a の円の極方程式

円上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$OP = 2OA \cos \angle AOP$$

ここで、 $OP = r$,

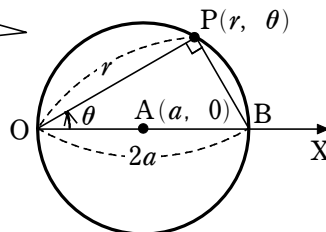
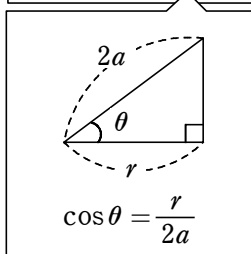
$$OA = a,$$

$$\cos \angle AOP = \cos \theta$$

であるから、極方程式は

$$r = 2a \cos \theta \quad \text{終}$$

直径の円周角は直角



一方で $r = 2a \cos \theta$ の両辺に r を掛けると

$$r^2 = 2ar \cos \theta$$

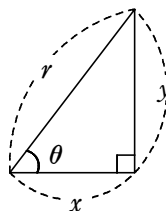
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r \cos \theta = x \text{ より}$$

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$(x - a)^2 - a^2 + y^2 = 0$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ゆえに 中心}(a, 0) \text{ 半径 } a \text{ の円であることがわかる}$$



例題) 極座標が $(3, \frac{\pi}{4})$ である点 A を通り、OA に垂直な直線 ℓ の極方程式を求めよ。

証明 直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$OP \cos \angle AOP = OA$$

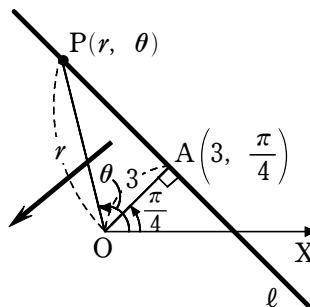
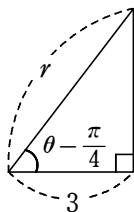
ここで、

$$OP = r, \quad OA = 3,$$

$$\cos \angle AOP = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから、極方程式は

$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = 3 \quad \text{終}$$



平面上の曲線【極座標と極方程式】

極方程式で表された曲線を、直交座標に関する方程式で表すことを考えよう。

例題) 極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ の表す曲線を、直交座標に関する方程式で表せ。

解 この曲線上の点 P の極座標を (r, θ) 、直交座標を (x, y) とする。

極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ の両辺に r を掛けると

$$r^2 = 2r\cos\theta + 2r\sin\theta$$

$r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ を代入すると

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

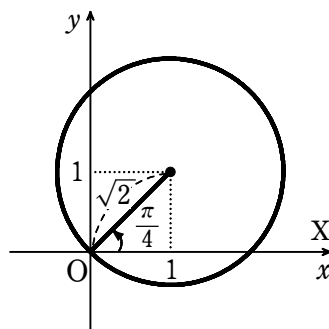
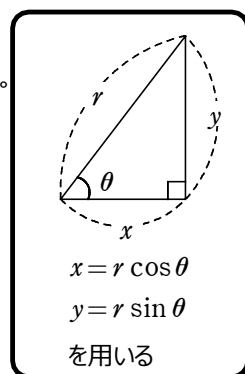
よって、求める方程式は

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

例題で求めた x, y の方程式は $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ と変形される。よって、極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$

の表す曲線は、極座標が $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ で

ある点を中心とし、極 O を通る円であることがわかる。



【注意】 極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ は、

$$\begin{aligned} \text{合成すると } \cos \theta + \sin \theta &= \sqrt{2} \left(\cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

であるから $r = 2\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ と変形される。

直交座標に関する方程式で表された曲線を、極方程式で表すことを考えよう。

例題) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を極方程式で表せ。

解 $x^2 - y^2 = 1$ に $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入すると

$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1 \quad \text{よって} \quad r^2\cos 2\theta = 1$$

平面上の曲線【極座標と極方程式】

□ 2次曲線の極方程式～離心率と極方程式

例題) 極座標が $(2, 0)$ である点 A を通り、始線に垂直な直線を ℓ とする。

極 O を焦点、 ℓ を準線とする放物線の極方程式を求めよ。

解 放物線上の点 P の極座標を (r, θ) とし、

点 P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると、放物線の定義から

$$OP = PH$$

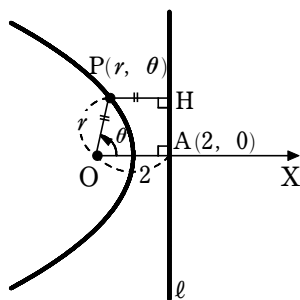
が成り立つ。ここで

$$OP = r, \quad PH = 2 - r \cos \theta$$

であるから

$$r = 2 - r \cos \theta$$

$$\text{よって} \quad r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$$



極座標が $(a, 0)$ である点 A を通り、始線 OX に垂直な直線を ℓ とする。点 P から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき、離心率

$$e = \frac{OP}{PH} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は、2次曲線になる。その2次曲線の極方程式を求めてみよう。

右の図において、点 P を2次曲線上の点とし、その極座標を (r, θ) とすると、

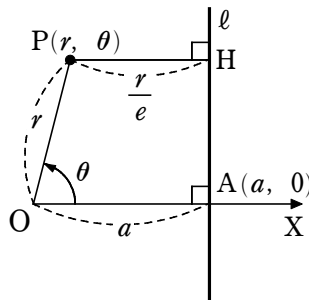
$OP = r$ と $\textcircled{1}$ から

$$PH = \frac{r}{e}$$

また $PH = a - r \cos \theta$

$$\text{よって} \quad \frac{r}{e} = a - r \cos \theta$$

$$\text{ゆえに} \quad r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



一般に、2次曲線の極方程式は、 $\textcircled{2}$ の式で与えられる。

2次曲線の極方程式 $\textcircled{2}$ において、次のことが成り立つ。

$0 < e < 1$ のとき $\textcircled{2}$ は O を焦点の1つとする楕円を表す。

$e = 1$ のとき $\textcircled{2}$ は O を焦点、 ℓ を準線とする放物線を表す。

$e > 1$ のとき $\textcircled{2}$ は O を焦点の1つとする双曲線を表す。

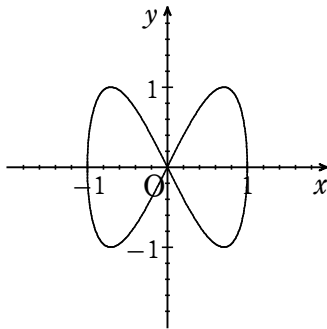
平面上の曲線【極方程式で表された曲線】

□媒介変数で表された曲線

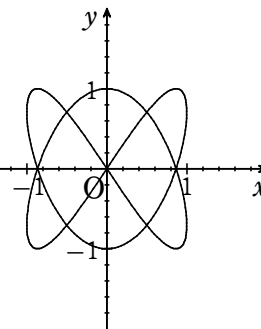
有理数 a, b に対して、媒介変数表示 $x = \sin at, y = \sin bt$ で表される曲線を **リサージュ曲線** という。

例) リサージュ曲線 $x = \sin at, y = \sin bt$ において、 a, b が次の値をとるとき下図のようになる。

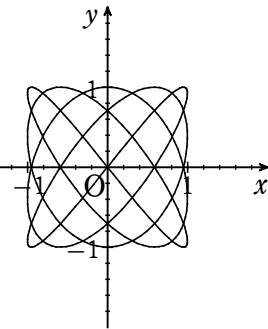
(1) $a=1, b=2$



(2) $a=2, b=3$



(3) $a=4, b=5$



次の媒介変数で表される曲線を、コンピュータで描け。

(1) $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin 5t \end{cases}$

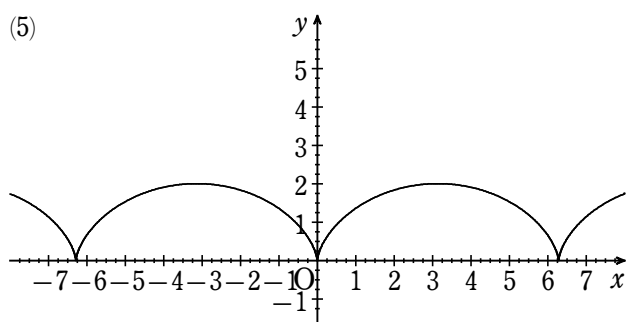
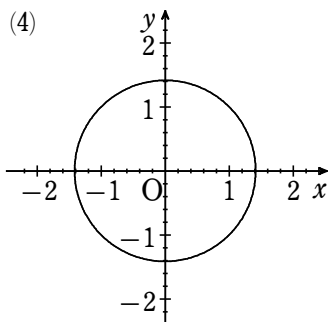
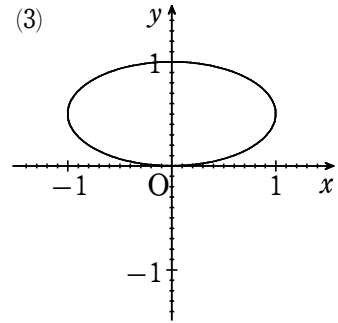
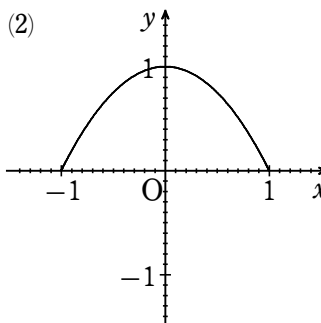
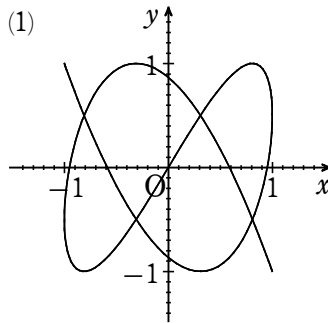
(2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = \sin t - \cos t \\ y = \sin t + \cos t \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

解答



平面上の曲線【極方程式で表された曲線】

□ 極方程式で表された曲線

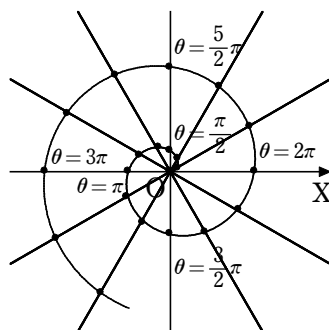
極方程式が与えられたとき、これを満たす (r, θ) を極座標とする点を次々にとって、それらの点の軌跡として曲線を描くことができる。

例) $\theta \geq 0$ のとき、極方程式 $r = \frac{\theta}{2}$ の表す曲線

θ のいろいろな値に対応する r の値は、次の表のようになる。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	……
r	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	……

これらの値の組 (r, θ) を極座標にもつ点をとっていくと、それらの点は右の図のような曲線上にある。 終



例) の極方程式

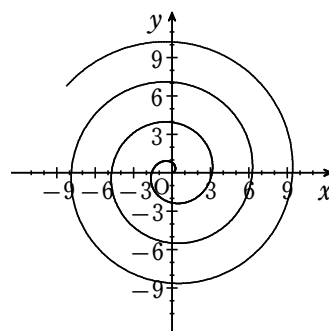
$$r = \frac{\theta}{2} \quad (\theta \geq 0)$$

の表す曲線をコンピュータで描くと、右の図(*)のようになる。

一般に、 $a > 0$ のとき、極方程式

$$r = a\theta \quad (\theta \geq 0)$$

で表される曲線を **アルキメデスの渦巻線** という。



(*) 極方程式で表される曲線の表示画面を、座標平面の場合と同じにしている。

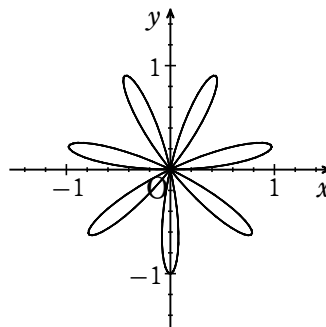
例) 極方程式 $r = \sin a\theta$ で表される曲線を **正葉曲線** という。ただし、 a は有理数とする。

例) $a = 7$ のとき、正葉曲線

$$r = \sin 7\theta$$

をコンピュータで描くと、右の

図のようになる。 終



平面上の曲線【極方程式で表された曲線】

例) 極方程式 $r = a + b\cos\theta$ で表される曲線を **リマソン** という。

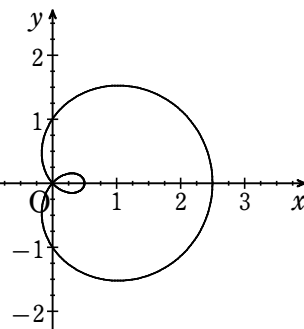
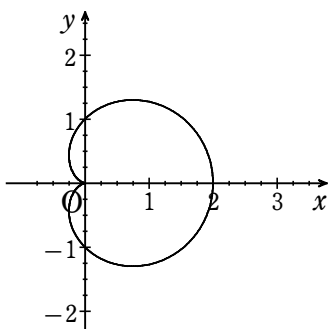
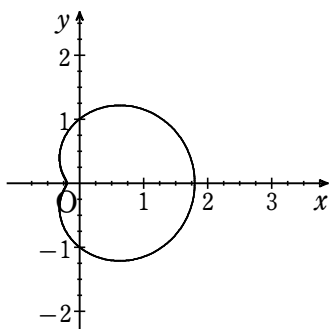
特に, $a = b$ のとき, 極方程式 $r = a(1 + \cos\theta)$ で表される曲線を **カージオイド**^(*) という。

リマソンは, a, b の値によって, 次のようになる。

$$a = 1, b = 0.8$$

$$a = 1, b = 1$$

$$a = 1, b = 1.5$$



例) $a > 0$ とする。2 定点 $A(-a, 0), B(a, 0)$ からの距離の積が a^2 に等しい点 P の軌跡を **レムニスケート** という。

(1) レムニスケートの方程式は, 次の式で与えられる。

$P(x, y)$ とする。

$$PA \cdot PB = a^2 \text{ から } PA^2 \cdot PB^2 = a^4 \dots\dots ①$$

$$① \text{ の左辺} = \{(x+a)^2 + y^2\} \{(x-a)^2 + y^2\}$$

$$= (x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax)$$

$$= (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2$$

$$① \text{ から } \{(x^2 + y^2) + a^2\}^2 = 4a^2x^2 + a^4$$

$$\text{よって } (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 = 4a^2x^2 + a^4$$

$$\text{ゆえに } (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

(2) レムニスケートの極方程式を求め, $a = 1$ のときの概形をコンピュータで描くと次のようになる。

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$$

$$(1) \text{ の結果に代入して } r^4 = 2a^2r^2\cos 2\theta$$

$$r^2(r^2 - 2a^2\cos 2\theta) = 0 \text{ から}$$

$$r = 0 \text{ または } r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

$r = 0$ は $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ に含まれるから,

求める方程式は

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

$a = 1$ のときのグラフは右の図のようになる。

