

複素数平面【複素数平面】

□複素数平面

数学Ⅱで学んだように、

$$i^2 = -1$$

複素数は2つの実数 a , b と虚数単位 i を用いて

$$a + bi$$

の形で表される。

以下、複素数 $a + bi$ と書いた場合、
文字 a , b は実数を表すものとする。

複素数 $a + bi$ について、 a をその**実部**といい、 b をその**虚部**という。

たとえば、 $2 + 3i$ の実部は2、虚部は3である。

$b = 0$ のときの複素数 $a + 0i$ は実数 a を表す。 $b \neq 0$ のときの複素数 $a + bi$ を**虚数**といい、とくに $a = 0$ である虚数 bi を**純虚数**という。

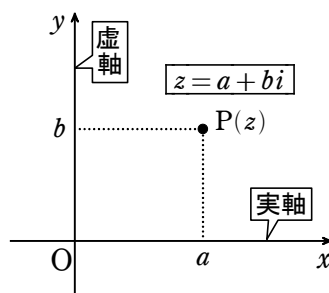
複素数 $a + bi$ に対して、座標平面上の点 (a, b) を対応させると、
どんな複素数も座標平面上の点で表すことができる。このように、複素数を
点で表す座標平面を **複素数平面** または **複素平面** という。

複素数平面上の1つの点は、1つの複素数を表す。

複素数平面を考える場合、 x 軸を**実軸**、 y 軸を**虚軸**という。
実軸上の点は実数を表し、虚軸上の原点 O 以外の点は純虚
数を表す。

複素数平面上で複素数 z を表す点 P を $P(z)$ と書く。また、この点
を点 z ということがある。たとえば、点 0 とは原点 O のことである。

複素数平面のことを、
ガウス平面と呼ぶことがある。

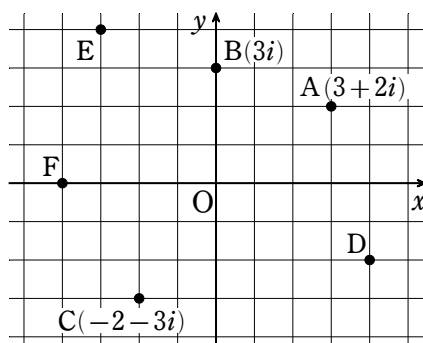


例1) 複素数平面上に、

点 $A(3 + 2i)$, $B(3i)$, $C(-2 - 3i)$ を

図示すると、右のようになる。

終



問1) 図で、点 D , E , F はそれぞれどのような
複素数を表すか。

問2) 4点 $G(-1 + i)$, $H(2 + 3i)$, $I(-2i)$, $J(-1)$ をそれぞれ上の複素数平面に示せ。

複素数平面【複素数平面】

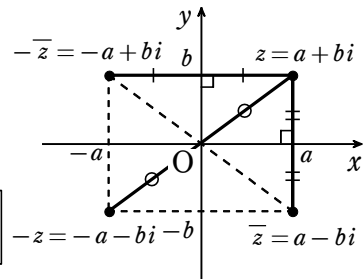
□ 共役な複素数

複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。すなわち, $z = a + bi$ に対して, $\bar{z} = a - bi$ である。 $\bar{z}$ を z の **共役複素数** ともいう。共役な複素数の性質として

$$\begin{array}{ll} 1 \quad \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} & 2 \quad \overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta} \\ 3 \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta} & 4 \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \end{array}$$

が成り立つ。

$$\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n \text{ も成り立つ}$$



また z と $\bar{z}$ について

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\overline{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

が成り立つ。したがって, 複素数平面上の点について, 次のことが成り立つ。

点 $\bar{z}$ は点 z と実軸に関して対称

点 $-z$ は点 z と原点に関して対称

点 $-\bar{z}$ は点 z と虚軸に関して対称

これから, 次が成り立つことがわかる。

『 z が実数』ならば『 $z = a$ 』

『 $\bar{z} = a$ 』であるから『 $\bar{z} = z$ 』

$$z \text{ が実数} \iff \bar{z} = z$$

$$z \text{ が純虚数} \iff \bar{z} = -z, z \neq 0$$

『 z が純虚数』ならば『 $z = bi$ 』

『 $\bar{z} = -bi$ 』であるから『 $\bar{z} = -z$ 』

問4) $z = 2 - 3i$ とする。点 $P(z)$ と, 実軸に関して対称な点を Q , 原点に関して対称な点を R , 虚軸に関して対称な点を S とするとき, Q, R, S を表す複素数をそれぞれ求めよ。

実軸に関して対称な点を Q $\bar{z} = 2 + 3i$

原点に関して対称な点を R $-z = -2 + 3i$

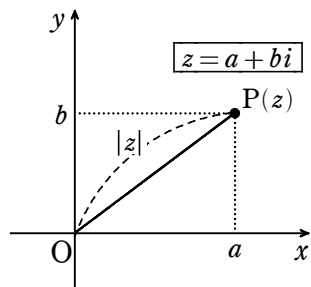
虚軸に関して対称な点を S $-\bar{z} = -2 - 3i$

複素数平面【複素数平面】

□複素数の絶対値

複素数平面上の2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ 間の距離は、
座標平面上の場合と同様に線分 AB の長さとする。

原点 O と点 $P(z)$ との距離を、複素数 z の絶対値 といひ、
 $|z|$ で表す。 $z = a + bi$ のとき、 $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ で
あるから、次のことがいえる。



複素数の絶対値

複素数 $z = a + bi$ の絶対値は $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

補足 z が実数のとき、
 $|z|$ は実数の絶対値と
一致する。

問5) 複素数 $-3 + 2i$, $5 + 5i$, $-3i$ の絶対値は、それぞれ

$$|-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|5 + 5i| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|-3i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

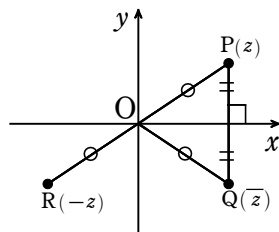
絶対値の定義から次のことが成り立つ

複素数の絶対値

$$1 \quad |z| \geq 0 \quad \text{とくに} \quad |z| = 0 \iff z = 0$$

$$2 \quad |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$3 \quad |z|^2 = z \bar{z}$$



□複素数の実数倍

実数 k と複素数 $z = a + bi$ について、 $kz = ka + kbi$ である。
よって、 $\alpha \neq 0$ のとき、点 $k\alpha$ は2点 0 , α を通る直線 ℓ 上にある。

逆に、この直線 ℓ 上の点は、 α の実数倍の複素数を表す。

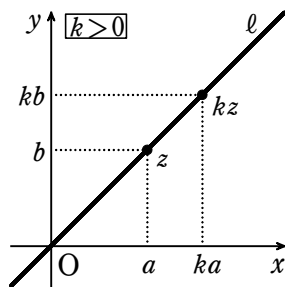
補足 $k < 0$ のとき、点 kz は直線 ℓ 上で、

原点に関して点 z と反対の位置にある。

よって、 $z \neq 0$ のとき、次のことが成り立つ。

3点 0 , α , β が一直線上にある $\iff \beta = k\alpha$ となる実数 k がある

複素数 α を表す点を A , $k\alpha$ を表す点を B とすると、線分 OB の長さは線分 OA の長さの
 $|k|$ 倍である。すなわち、 $OB = |k|OA$ である。



例題) $\alpha = 4 - i$, $\beta = x + 2i$ とする。2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき、
実数 x の値を求めよ。

解答 3点 O , A , B が一直線上にあることから、 $\beta = k\alpha$ となる実数 k がある。

$$x + 2i = k(4 - i) \quad \text{から} \quad x + 2i = 4k - ki$$

$$\text{よって} \quad x = 4k, \quad 2 = -k$$

$$k = -2 \quad \text{から} \quad x = 4 \cdot (-2) = -8$$

$\bigcirc + \square i = \bigcirc' + \square' i$ のとき
 $\bigcirc = \bigcirc'$, $\square = \square'$

複素数平面【複素数平面】

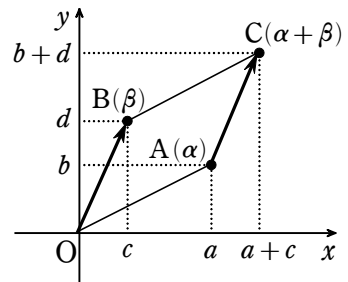
□複素数の和，差の図示 ベクトルのように

複素数の和，差を複素数平面上で図示してみよう。

2つの複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$

の和は $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$ である。

そこで，複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha + \beta)$ をとると，次のことがいえる。



点 $C(\alpha + \beta)$ は，原点 O を点 $B(\beta)$ に移す平行移動によって

点 $A(\alpha)$ が移る点である。

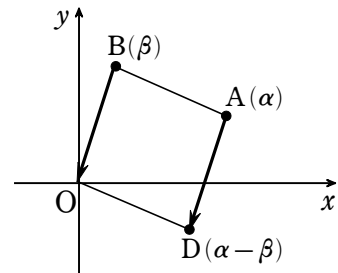
注意 右上の図において，四角形 $OACB$ は平行四辺形である。

2つの複素数 α , β とその差 $\alpha - \beta$ について考えよう。

次の等式が成り立つ。

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$$

そこで，複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $D(\alpha - \beta)$ をとると，次のことがいえる。



点 $D(\alpha - \beta)$ は，点 $B(\beta)$ を原点 O に移す平行移動によって

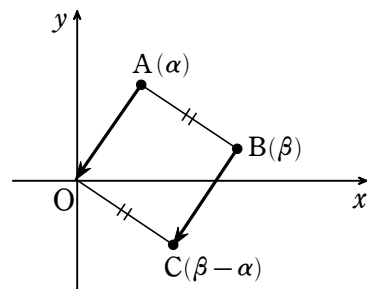
点 $A(\alpha)$ が移る点である。

注意 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ であるから， $\alpha + \beta$ の場合と逆向きの平行移動を考えている。

複素数の差について，右の図より， $AB = OC$ であるから，次のことがいえる。

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ 間の距離 AB は

$$AB = |\beta - \alpha| \quad (= |\alpha - \beta| \text{ でもよい})$$



例3) 2点 $A(4 - 3i)$, $B(2 + i)$ 間の距離 AB は

$$AB = |(2 + i) - (4 - 3i)| = |-2 + 4i|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

終

複素数平面【複素数平面】

例) 複素数 α, β について, $\alpha + \beta = 1$ のとき, 両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{1} \quad \text{すなわち} \quad \overline{\alpha} + \overline{\beta} = 1 \quad \text{終}$$

練習) 複素数 α, β について, $\alpha + \beta + i = 0$ のとき, $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$ を求めよ。

$$\alpha + \beta + i = 0 \quad \text{から} \quad \alpha + \beta = -i$$

両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{-i} \quad \text{すなわち} \quad \overline{\alpha} + \overline{\beta} = i \quad \text{終}$$

1 $z + \overline{z}$ は実数である

2 $z \overline{z} = |z|^2$

例題) 複素数 α について, 次のことを証明せよ。

$$|\alpha| = 1 \quad \text{のとき,} \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad \text{は実数である。}$$

証明) $|\alpha| = 1$ のとき, $|\alpha|^2 = 1$ であるから

$$\alpha \overline{\alpha} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$$

$$\text{よって} \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \overline{\alpha}$$

$$\alpha + \overline{\alpha} \quad \text{は実数であるから,} \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad \text{は実数である。} \quad \text{終}$$

練習) $|z| = 2$ かつ $|z + 3| = 3$ を満たす複素数 z について, 次の値を求めよ。

$$(1) \quad z \overline{z}$$

$$(2) \quad z + \overline{z}$$

$$(1) \quad z \overline{z} = |z|^2 = 2^2 = 4$$

$$z \overline{z} = |z|^2$$

$$(2) \quad |z + 3| = 3 \quad \text{の両辺を 2 乗すると} \quad |z + 3|^2 = 9$$

$$\text{よって} \quad (z + 3)(\overline{z + 3}) = 9$$

$$(z + 3)(\overline{z} + 3) = 9$$

$$\text{展開して整理すると} \quad z \overline{z} + 3z + 3\overline{z} = 0$$

$$z \overline{z} = 4 \quad \text{であるから} \quad 4 + 3(z + \overline{z}) = 0$$

$$\text{したがって} \quad z + \overline{z} = -\frac{4}{3}$$

$$|z|^2 = z \overline{z}$$

複素数平面【複素数の極形式】

□極形式

複素数平面上で、0でない複素数 $z = a + bi$ を表す点をPとする。線分 OP の長さを r 、半直線 OP を動径と考えて動径 OP の表す角を θ とすると

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

である。

よって、0でない複素数 z は次の形にも表される。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ただし、 $r > 0$ で、 θ は弧度法で表された一般角である。

負の角や 2π より大きい角も考えられる。

これを複素数 z の 極形式 という。 $r = |z|$ である。また、角 θ を z の 偏角 といい $\arg z$ で表す。偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲や $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲でただ1通りに定まる。

z の偏角の1つを θ_0 とすると、一般には、

$$\arg z = \theta_0 + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である。

$\arg$ は「偏角」を意味する英語 argument を略したものである。

例) 複素数 $1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

解答 $1 + \sqrt{3}i$ の絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{3}$$

したがって

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

複素数 z の偏角を θ とするとき、 $\bar{z}$ の偏角の1つは、

$$\arg \bar{z} = -\theta$$

である。また、 $|z| = |\bar{z}|$ であるから、 z と $\bar{z}$ の極形式について、次のことがいえる。

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ のとき

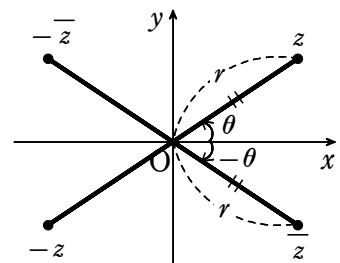
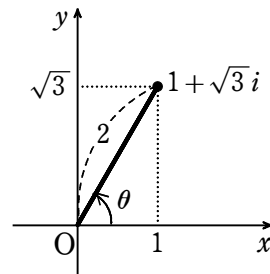
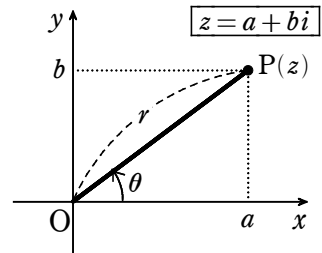
$$|\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z$$

$$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\}$$

問9) 複素数 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。このとき、 $-z$ 、 $-\bar{z}$ の絶対値と偏角を r 、 θ を用いてそれぞれ表せ。

解答 $-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\}$ 、 $-\bar{z} = r\{\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)\}$ なので

$$|-z| = r, \quad \arg(-z) = \theta + \pi \qquad |-\bar{z}| = r, \quad \arg(-\bar{z}) = \pi - \theta$$



複素数平面【複素数の極形式】

□ 極形式で表された複素数の積と商

絶対値が1である2つの複素数 $\cos \theta_1 + i \sin \theta_1$, $\cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ の積と商は、三角関数の加法定理により、次のようになる。

$$\begin{aligned} & (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ & \frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = \frac{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2} \\ &= \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

一般に、複素数の積と商については、次のことが成り立つ。

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ のとき}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

複素数の積と商の絶対値と偏角

$$1 \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$2 \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

注意 偏角についての等式では、 2π の整数倍の違いは無視して考える。

1 より、複素数 z と自然数 n について、 $|z^n| = |z|^n$ が成り立つ。

例5) $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + i \sin \frac{7}{12} \pi \right)$, $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ のとき、 $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$

をそれぞれ極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

解答

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{7}{12} \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7}{12} \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 4 \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = -2\sqrt{3} + 2i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(\frac{7}{12} \pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{7}{12} \pi - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1 + \sqrt{3} i \end{aligned}$$

複素数平面【複素数の極形式】

□原点を中心とする回転（複素数の積の図表示）

絶対値が1である複素数 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と複素数 z との積 αz について、その絶対値と偏角は、次のようになる。

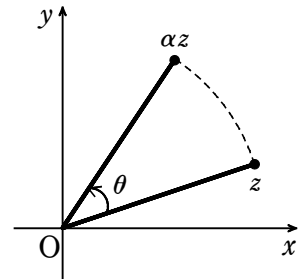
$$|\alpha z| = |\alpha| |z| = 1 \cdot |z| = |z|$$

$$\arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z = \arg z + \theta$$

このことから、次のことがいえる。

$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と z に対して、

点 αz は、点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。



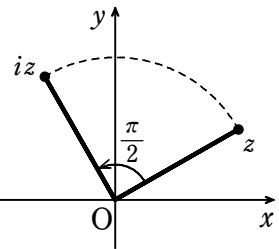
注意 $\overline{\alpha} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ であるから、

点 $\overline{\alpha} z$ は、点 z を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点である。

例 点 z と点 iz の位置関係を考えてみよう。

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}, \quad |i| = 1 \text{ であるから,}$$

点 iz は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。 (終)



例6 点 z と点 $(1+i)z$ の位置関係を考えてみよう。

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ であるから,}$$

$$|1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} \text{ より}$$

点 $(1+i)z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、

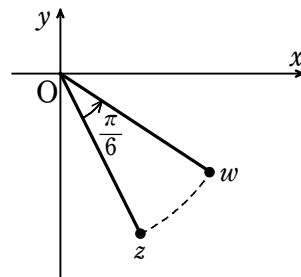
原点からの距離 $|z|$ を $\sqrt{2}$ 倍した点である。 (終)

例 $z = 2 - 4i$ とする。点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

解答 $w = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (2 - 4i)$$

$$= (\sqrt{3} + 2) + (-2\sqrt{3} + 1)i$$



複素数平面【複素数の極形式】

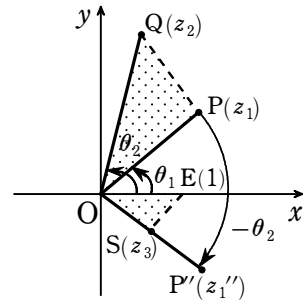
商について, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ とおくと $|z_3| = \frac{r_1}{r_2}$, $\arg z_3 = \theta_1 - \theta_2$

よって, 点 $S(z_3)$ は, 点 $P(z_1)$ を原点を中心として角 $-\theta_2$ だけ回転した点 $P''(z_1'')$ を $\frac{1}{r_2}$ 倍した点である。

$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ が実数でないとき, $\triangle EOS$ は $\triangle QOP$ を角 $-\theta_2$ だけ

回転し, $\frac{1}{r_2}$ 倍に拡大または縮小したものであることがわかる。

すなわち, $\triangle EOS$ と $\triangle QOP$ は相似であり, その相似比は $1 : r_2$ である。



例) 複素数 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ に対し, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ をそれぞれ極形式で表せ。

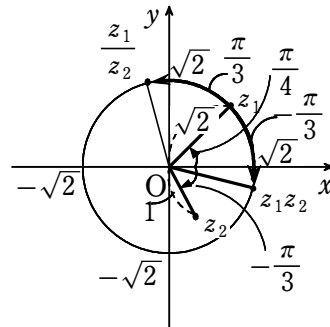
また, それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z_2 = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{12} \pi + i \sin \frac{7}{12} \pi \right) \end{aligned}$$



積 $\Rightarrow$ 距離は積, $\arg$ は和
商 $\Rightarrow$ 距離は商, $\arg$ は差

点 $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ を図示すると, 図のようになる。

例題 1) $\alpha = 1 + i$ とする。2 点 $0, \alpha$ を頂点とする正三角形の第 3 の頂点を表す

複素数 β を求めよ。(α の表す点を A , β の表す点を B とする)

点 B は, 点 A を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから,

B を表す複素数は

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (1 + i) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i$$

または

$$\left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) (1 + i) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i$$

すなわち

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i \quad \text{または} \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i$$

複素数平面【ド・モアブルの定理】

□ド・モアブルの定理

0 でない複素数に絶対値が1の複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を掛けると、絶対値は変わらずに、偏角が θ だけ増える。

このことを用いて z の累乗を考えると

$$z^2 = z z = \cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta) = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$z^3 = z z^2 = \cos(\theta + 2\theta) + i \sin(\theta + 2\theta) = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

となり、一般の自然数 n について、次の等式が成り立つことがわかる。

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

0 でない複素数 w に対して $w^0 = 1$ と定める。このとき、 $\textcircled{1}$ は $n = 0$ のときにも成り立つことがわかる。

また、0 でない複素数 w と自然数 m に対して $w^{-m} = \frac{1}{w^m}$ と定める。

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(0 - \theta) + i \sin(0 - \theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \quad \text{なので}$$

このとき、0 以上の整数 n について、次の等式が成り立つことがわかる。

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]^n = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、次のド・モアブルの定理 が成り立つ。

ド・モアブルの定理

$$n \text{ が整数のとき } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

例8) ド・モアブルの定理を用いて、 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$ の値を求めてみよう。

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{なので}$$

$$\text{よって } \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4 = \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos \pi + i \sin \pi$$

$$= -1$$

終

例題2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^5$ を計算せよ。

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

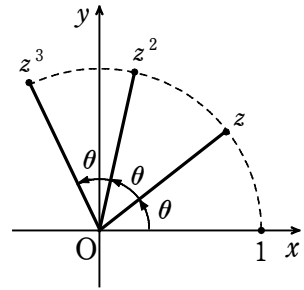
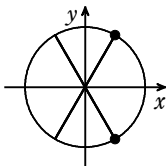
$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{より}$$

$$\text{よって } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^5 = (\sqrt{3})^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^5 = 9\sqrt{3} \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi\right)$$

$$= 9\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{27}{2}i$$

終



複素数平面【ド・モアブルの定理】

□ n 乗根

自然数 n と複素数 α に対して, $z^n = \alpha$ を満たす複素数 z を, α の n 乗根 という. 0 でない複素数 α の n 乗根は, n 個あることが知られている. 複素数の極形式を用いて, まず 1 の n 乗根について考えよう.

例) 1 の 3 乗根は, 3 つの複素数 $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ で,

極形式で表すと

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0$$

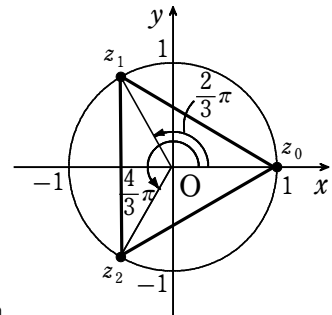
$$z_1 = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$z_2 = \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$$

となる. よって, 点 z_0, z_1, z_2 は,

点 1 が分点の 1 つとなるように,

単位円を 3 等分した各分点 (正三角形の頂点) である. 〔終〕



一般に, n を自然数として, z を 1 の n 乗根としよう.

$$z^n = 1 \text{ から } |z|^n = |z^n| = 1$$

$$|z| \text{ は正の実数であるから } |z| = 1$$

$$\text{ここで, } z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ とおくと, ド・モアブルの定理から } z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = 1$$

よって, $\cos n\theta = 1$, $\sin n\theta = 0$ であるから

$$n\theta = 2k\pi \text{ すなわち } \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ (} k \text{ は整数)}$$

となる. 逆に, k を整数として

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと, ド・モアブルの定理より $(z_k)^n = 1$ が成り立つから, z_k は 1 の n 乗根である. また, z_{n+k} と z_k の偏角は 2π だけ異なり, とともに絶対値は 1 であるから $z_{n+k} = z_k$ が成り立つ. よって, ① の z_k のうち, 互いに異なるものは $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ の n 個である.

以上より, 次のことが成り立つ.

1 の n 乗根

自然数 n に対して, 1 の n 乗根は, 次の n 個の複素数である.

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

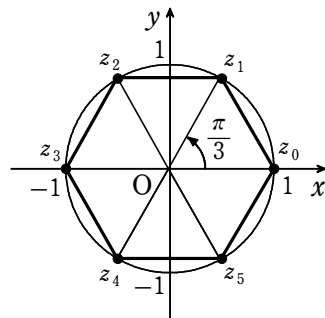
複素数平面【ド・モアブルの定理】

問 18) (2) 1 の 6 乗根は $6\theta = 2k\pi$ より $\theta = \frac{1}{3}k\pi$

$$z_k = \cos \frac{1}{3}k\pi + i\sin \frac{1}{3}k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots, 5)$$

$$\text{よって } z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = -1, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



6 個の 1 の 6 乗根は、点 1 が分点の 1 つとなるように、単位円を 6 等分する 6 個の分点を与えている。よって、これらの点は単位円に内接する正六角形の頂点になっている。 終

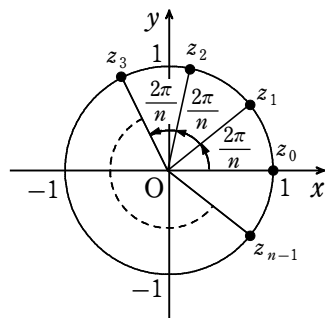
一般に、自然数 n に対して、1 の n 乗根

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

を表す点は、単位円を n 等分する n 個の分点である。

特に、分点の 1 つは点 1 である。



一般に、0 でない複素数の n 乗根は、極形式を用いと、次の例題のようにして求められる。

例題 3) 方程式 $z^4 = 8(-1 + \sqrt{3}i)$ を解け。

【解答】 方程式の解 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i\sin \theta)$ …… ①

とすると与式の左辺は $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

与式の右辺を極形式で表すと $8(-1 + \sqrt{3}i) = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi\right)$

よって $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ であるから } r = 2 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると、 $k=0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad \dots\dots ③$$

②, ③を①に代入すると、求める解は

$$z = \sqrt{3} + i, \quad -1 + \sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3} - i, \quad 1 - \sqrt{3}i$$

複素数平面【図形への応用】

ここでは複素数平面上で図形を考えてみよう。

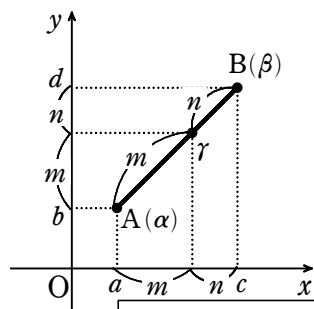
□線分の内分点, 外分点

複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ を表す点を, それぞれ A , B とする。このとき, 線分 AB を $m : n$ に内分する点 r の実部, 虚部

は, それぞれ $\frac{na + mc}{m + n}$, $\frac{nb + md}{m + n}$ となる。

外分の場合も同様にして求めることができる。

よって, 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ に対して, 次の 1, 2 が成り立つ。



数Ⅱ図形と方程式

数Bベクトル

と同様に

内分点, 外分点

1 線分 AB を $m : n$ に内分する点を表す複素数は $\frac{n\alpha + m\beta}{m + n}$

特に, 線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha + \beta}{2}$

2 線分 AB を $m : n$ に外分する点を表す複素数は $\frac{-n\alpha + m\beta}{m - n}$

問1) 次の α , β について, 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $3 : 2$ に内分する点, 外分する点を表す複素数を, それぞれ求めよ。

(1) $\alpha = 2 + 4i$, $\beta = 7 - i$

$$\text{内分点 } \frac{2(2 + 4i) + 3(7 - i)}{3 + 2} = \frac{4 + 8i + 21 - 3i}{5} = \frac{25 + 5i}{5} = 5 + i$$

$$\text{外分点 } \frac{-2(2 + 4i) + 3(7 - i)}{3 - 2} = \frac{-4 - 8i + 21 - 3i}{1} = 17 - 11i$$

(2) $\alpha = 4 - i$, $\beta = -2 + 3i$

$$\text{内分点 } \frac{2(4 - i) + 3(-2 + 3i)}{3 + 2} = \frac{8 - 2i - 6 + 9i}{5} = \frac{2 + 7i}{5}$$

$$\text{外分点 } \frac{-2(4 - i) + 3(-2 + 3i)}{3 - 2} = \frac{-8 + 2i - 6 + 9i}{1} = -14 + 11i$$

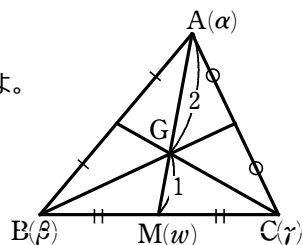
例題1) 複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を 3 頂点とする

$\triangle ABC$ の重心 G は, $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ で表されることを証明せよ。

【証明】 線分 BC の中点を $M(w)$ とすると, 重心 G は中線 AM を $2 : 1$ に内分する点である。

$$w = \frac{\beta + \gamma}{2} \text{ であるから, } G \text{ は } \frac{\alpha + 2 \cdot \frac{\beta + \gamma}{2}}{2 + 1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

すなわち, $\triangle ABC$ の重心 G は $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ で表される。



数Ⅱ図形と方程式

数Bベクトル

と同様に

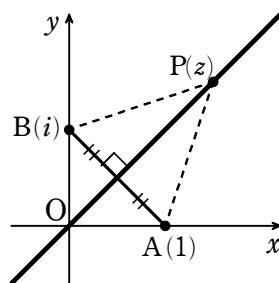
複素数平面【図形への応用】

□垂直二等分線

異なる2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点 $P(z)$ は

$$AP=BP$$

すなわち $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす点である。



例1) 方程式 $|z+2|=|z-i|$ を満たす点 z は,
2点 $A(-2)$, $B(i)$ から等距離にある点の全体で,
線分 AB の垂直二等分線である。○

□円

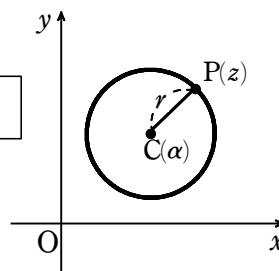
r は正の実数とする。点 α を中心とする半径 r の円は,
次の方程式を満たす点 z 全体である。

$$CP=r \quad \text{すなわち}$$

$$|z-\alpha|=r$$

数Bベクトルと同様に

とくに, 原点を中心とする半径 r の円は, $|z|=r$



例2) 条件 $|z+1-i|=2$ を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

$$|z-(-1+i)|=2$$

と変形できるから, 点 z は, 点 $-1+i$ を中心とする半径2の円をえがく。

例題2) $w=i(z+2)$ とする。点 z が単位円上を動くとき, 点 w はどのような図形をえがくか。

点 z が単位円上を動くから

$$|z|=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$w=i(z+2)$ を z について解くと

$$z = \frac{w}{i} - 2 = \frac{w-2i}{i}$$

これを①に代入して

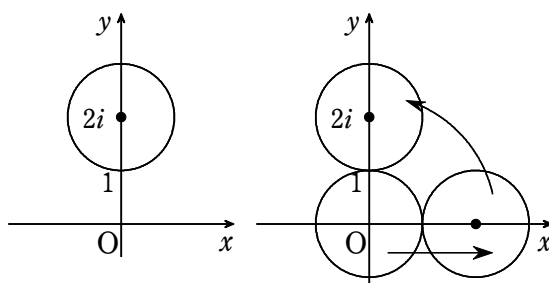
$$\left| \frac{w-2i}{i} \right| = 1$$

$$\frac{|w-2i|}{|i|} = 1$$

$$|w-2i|=1$$

$$|i|=1$$

点 z が単位円上を動けば,
点 $z+2$ は点2を中心とする半径1の円
さらに i 倍すると $\frac{\pi}{2}$ の回転を与えることになる



したがって, 点 w は点 $2i$ を中心とする半径1の円をえがく

複素数平面【図形への応用】

□アポロニウスの円

例題) 方程式 $|z+3|=2|z|$ を満たす点 z 全体は、どのような図形か。

方程式の両辺を 2 乗すると $|z+3|^2=4|z|^2$

よって $(z+3)(\overline{z+3})=4z\overline{z}$

ゆえに $(z+3)(\overline{z+3})=4z\overline{z}$

左辺を展開して整理すると

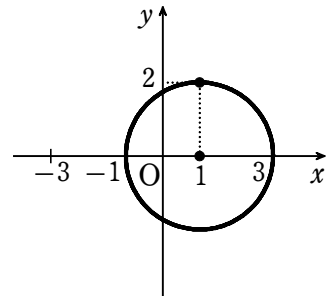
$$z\overline{z}-(z+\overline{z})=3$$

よって $(z-1)(\overline{z}-1)=2^2$

すなわち $|z-1|^2=2^2$

ゆえに $|z-1|=2$

したがって、求める図形は点 1 を中心とする半径 2 の円である。



例題の円は、2 点 A(-3) と O(0) からの距離の比が 2 : 1 である点 z 全体である。

このような円を **アポロニウスの円** という。

例題 3) 複素数平面で、2 点 A(-1), B(2) からの距離の比が 2 : 1 である点 P(z) 全体の表す図形を求めよ。

条件より AP : BP = 2 : 1 すなわち AP = 2BP

よって $|z+1|=2|z-2|$

両辺を 2 乗すると

$$|z+1|^2=2^2|z-2|^2$$

$$(z+1)(\overline{z+1})=4(z-2)(\overline{z-2})$$

$$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$$

展開して整理すると

$$z\overline{z}+(z+\overline{z})+1=4\{z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4\}$$

$$z\overline{z}+(z+\overline{z})+1=4z\overline{z}-8(z+\overline{z})+16$$

$$3z\overline{z}-9(z+\overline{z})+15=0$$

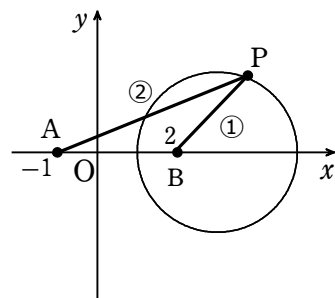
$$z\overline{z}-3(z+\overline{z})+5=0$$

よって $(z-3)(\overline{z}-3)-9+5=0$

$$(z-3)(\overline{z}-3)=4 \text{ より } (z-3)(\overline{z}-3)=4$$

$$|z-3|^2=2^2 \text{ したがって } |z-3|=2$$

これは中心が 3, 半径 2 の円を表す



$z = a + bi$ として
2 点間の距離から解く方
法もある (数 II 図形と方
程式として解く)

複素数平面【図形への応用】

□一般の点における回転

複素数平面上の2点 α, β について、点 β を点 α を中心に角 θ だけ回転した点 z を α, β を用いて表そう。

点 β と点 z をともに複素数 $-\alpha$ だけ平行移動した点をそれぞれ点 β', z' とすると

$$\beta' = \beta - \alpha$$

$$z' = z - \alpha$$

となる。点 β' を原点 O を中心に角 θ だけ

回転すると点 z' に一致するから

$$z' = (\cos \theta + i \sin \theta) \beta'$$

β' を θ だけ
回転させる

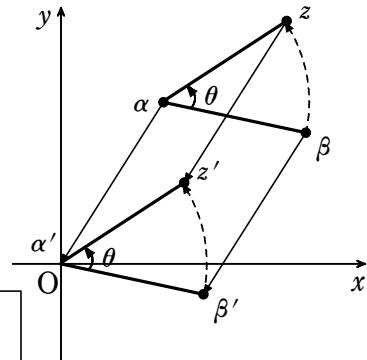
したがって

$$z - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta) (\beta - \alpha)$$

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta - \alpha \\ z' &= z - \alpha \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = (\cos \theta + i \sin \theta) (\beta - \alpha) + \alpha$$



例3) 点 6 を点 $4i$ を中心に $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させた点 z を求めてみよう。

$4i$ が原点となるように考えると

点 $6 - 4i$ を $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させると点 $z - 4i$ になるので

$$z - 4i = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) (6 - 4i)$$

$$z = \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) (6 - 4i) + 4i$$

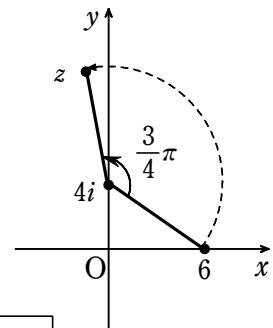
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) (6 - 4i) + 4i$$

$$= -3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i + 3\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i^2 + 4i$$

$$= -3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i + 3\sqrt{2}i + 2\sqrt{2} + 4i$$

$$= -\sqrt{2} + (4 + 5\sqrt{2})i$$

上の変形を用いると
ここから始まる



複素数平面【図形への応用】

□半直線のなす角

複素数平面上の異なる2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ について, 半直線 AB が実軸の正の向きとなす角を θ とする。ただし, 角は向きを含めて考える。

$-\alpha$ だけ平行移動すると, 点 A は原点に移り, 点 B は点 $B'(\beta - \alpha)$ に移るから, 次のことが成り立つ。

$$\theta = \arg(\beta - \alpha)$$

$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を異なる3点とするとき, 半直線 AB から半直線 AC までの回転角を, $\theta = \angle\beta\alpha\gamma$ と表すことにする。

点 α が原点 0 に移るような平行移動で, 点 β が点 β' に, 点 γ が点 γ' に移るとすると

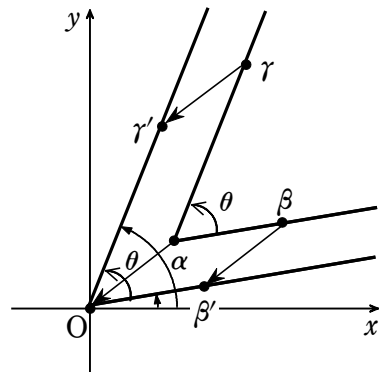
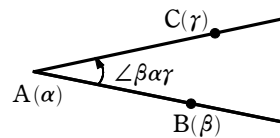
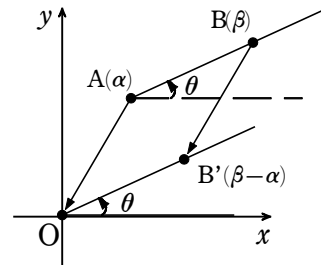
$$\beta' = \beta - \alpha, \quad \gamma' = \gamma - \alpha$$

また $\theta = \angle\beta\alpha\gamma = \angle\beta'0\gamma'$

$$= \arg \gamma' - \arg \beta'$$

$$= \arg \frac{\gamma'}{\beta'}$$

したがって, 次の等式が成り立つ。



半直線のなす角

$$\text{異なる3点 } \alpha, \beta, \gamma \text{ に対して} \quad \angle\beta\alpha\gamma = \arg\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)$$

例5) 複素数 $1+2i$, $3-i$, $2+7i$ が表す点をそれぞれ P , Q , R とするとき, $\angle QPR$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{(2+7i)-(1+2i)}{(3-i)-(1+2i)} &= \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= \frac{2+3i+10i-15}{4+9} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \angle QPR = \arg \frac{(2+7i)-(1+2i)}{(3-i)-(1+2i)} = \frac{3}{4}\pi$$

□終

複素数平面【図形への応用】

回転角 $\angle \beta \alpha \gamma$ が、特別な値をとる場合を考えてみよう。

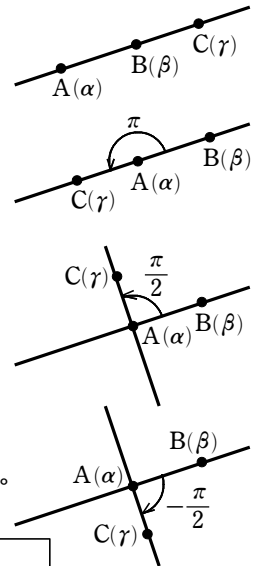
$\angle \beta \alpha \gamma$ が 0 または π であるのは、3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が一直線上にあるときである。これは $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が 0 または π であるとき、すなわち $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数のときである。

また、 $\angle \beta \alpha \gamma$ が $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ であるのは、2 直線 AB, AC が垂直に交わるときである。これは $\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ であるとき、すなわち $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数のときである。

よって、異なる 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ について、次のことが成り立つ。

3 点 A, B, C が一直線上にある $\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数

2 直線 AB, AC が垂直に交わる $\iff \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数



例 6) 3 点 $P(1)$, $Q(2+i)$, $R(x-i)$ について、 P , Q , R が一直線上にあるときと、2 直線 PQ , PR が垂直に交わる時の実数 x の値をそれぞれ求めてみよう。

$$\frac{(x-i)-1}{(2+i)-1} = \frac{(x-1)-i}{1+i} = \frac{\{(x-1)-i\}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(x-1)-(x-1)i-i-1}{1+1} = \frac{(x-2)-xi}{2}$$

であるから、

$$3 \text{ 点 } P, Q, R \text{ が一直線上にあるのは } \frac{(x-2)-xi}{2} \text{ が実数} \Rightarrow x=0$$

$$2 \text{ 直線 } PQ, PR \text{ が垂直に交わるのは } \frac{(x-2)-xi}{2} \text{ が純虚数} \Rightarrow x-2=0 \therefore x=2$$

応用例題 4) 3 点 $P(z_1)$, $Q(z_2)$, $R(z_3)$ において、 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + \sqrt{3}i$ が成り立つとき、

$\triangle PQR$ はどのような三角形か。

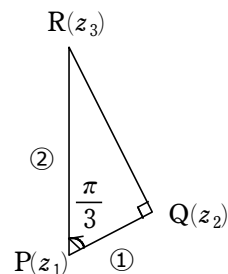
$$\left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1} \text{ より}$$

$$PQ : PR = |z_2 - z_1| : |z_3 - z_1| = 1 : 2$$

$$\text{また } 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \text{ より}$$

$$\angle QPR = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$$

したがって、 $\triangle PQR$ は、 $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$, $\angle QPR = \frac{\pi}{3}$ であるような直角三角形である。



複素数平面【図形への応用】

演習 z を複素数とし、 i を虚数単位とする。

- (1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。
- (2) z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

解説

- (1) $z+i \neq 0$ かつ $z-i \neq 0$ から $z \neq \pm i$

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2+1}$$

これが実数のとき $\frac{2z}{z^2+1} = \overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)}$

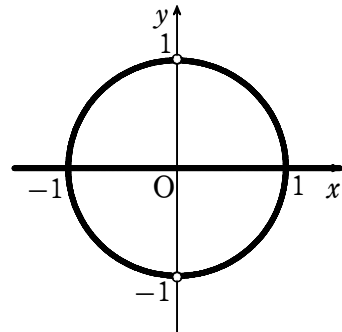
$$\frac{2z}{z^2+1} = \overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)} \iff \frac{2z}{z^2+1} = \frac{2\bar{z}}{(\bar{z})^2+1}$$

$$\iff \bar{z}|z|^2 + z - z|z|^2 - \bar{z} = 0$$

$$\iff (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

$$\iff z = \bar{z} \text{ または } |z| = 1$$

$$\iff z \text{ は実数 または } |z| = 1 \text{ (ただし, } z \neq \pm i)$$



よって、求める図形は右上の図のようになる。

ただし、点 i , $-i$ を除く。

- (2) $w = \frac{z+i}{z-i}$ から $w(z-i) = z+i$

$$\text{すなわち } (w-1)z = (w+1)i$$

$$w=1 \text{ はこれを満たさないから } w \neq 1 \quad \text{よって } z = \frac{w+1}{w-1}i$$

- [1] $z = \bar{z}$ のとき

$$z = \bar{z} \iff \frac{w+1}{w-1}i = \overline{\frac{w+1}{w-1}i}(-i)$$

$$\iff (w+1)(\bar{w}-1) + (\bar{w}+1)(w-1) = 0$$

$$\iff |w|^2 - w + \bar{w} - 1 + |w|^2 - \bar{w} + w - 1 = 0$$

$$\iff |w| = 1 \text{ (ただし, } w \neq 1)$$

よって、点 w は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く。

ただし、点 1 を除く。

- [2] $|z| = 1$ のとき

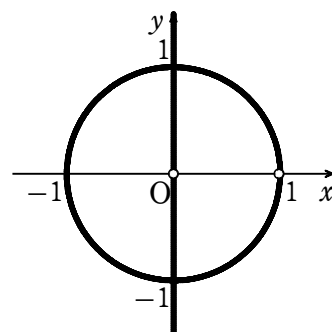
$$z \neq \pm i \text{ から } w \neq 0$$

$$|z| = 1 \iff \left| \frac{w+1}{w-1}i \right| = 1 \iff |w+1| = |w-1|$$

よって、点 w は 2 点 -1 , 1 を結ぶ線分の垂直二等分線、すなわち虚軸上を動く。

ただし、点 O を除く。

- [1], [2] から、求める図形は右上の図のようになる。ただし、点 0 , 1 を除く。



(北海道大学2003)

複素数平面【図形への応用】

演習 α, β は等式 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ を満たす 0 でない複素数とする。

- (1) $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。
 (2) 複素数平面上で、3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形の3つの角の大きさを求めよ。

解答 (1) 等式の両辺を $\beta^2 (\neq 0)$ で割ると $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 4 = 0$ よって $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm \sqrt{3}i$

$\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと $\frac{\alpha}{\beta} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right), 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

- (2) $O(0), A(\alpha), B(\beta)$ とすると、(1) から

$$\left|\frac{\alpha-0}{\beta-0}\right| = 2 \quad \text{すなわち} \quad OA = 2OB \quad \text{また} \quad \angle BOA = \frac{\pi}{3}$$

よって、 $\triangle OAB$ は、点 B を直角の頂点とする三角形で $\angle A = \frac{\pi}{6}, \angle O = \frac{\pi}{3}, \angle B = \frac{\pi}{2}$

練習 原点 O とは異なる2点 $A(\alpha), B(\beta)$ がある。次の等式が成り立つとき、 $\triangle OAB$ はどんな形の三角形か。

- (1) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ (2) $3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$

解説

- (1) $\beta^2 \neq 0$ であるから、等式の両辺を β^2 で割ると $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 0$

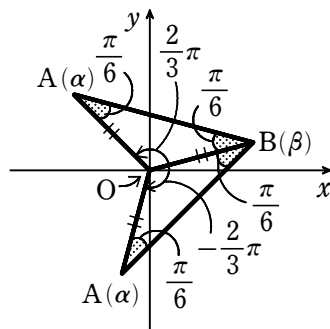
$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ &= \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{OA}{OB} = 1$$

よって $OA = OB$

$$\text{また, } \arg \frac{\alpha}{\beta} = \pm \frac{2}{3}\pi \text{ であるから} \quad \angle BOA = \frac{2}{3}\pi$$

したがって、 $\triangle OAB$ は $OA = OB, \angle O = \frac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である。



- (2) $\beta^2 \neq 0$ であるから、等式の両辺を β^2 で割ると $3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 6 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 4 = 0$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 3 \cdot 4}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{6}\right) \right\} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

よって $OA : OB = 2 : \sqrt{3}$

$$\text{また, } \arg \frac{\alpha}{\beta} = \pm \frac{\pi}{6} \text{ であるから} \quad \angle BOA = \frac{\pi}{6}$$

したがって、 $\triangle OAB$ は $\angle O = \frac{\pi}{6}, \angle A = \frac{\pi}{3}, \angle B = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

