

関数と極限【分数関数とそのグラフ】

【内容目標】 分数関数のグラフの形や特徴を押さえよう！

$y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2x-5}{x+1}$ のように, x についての分数式で表された関数を, x の **分数関数** という。特

に断りがない場合, 分数関数の定義域は, 分母を 0 にする x の値を除く実数全体である。

分数関数のグラフと性質

1 分数関数 $y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフは,

$y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で,

漸近線は 2 直線 $x = p$, $y = q$ である。

2 定義域は $x \neq p$, 値域は $y \neq q$ である。

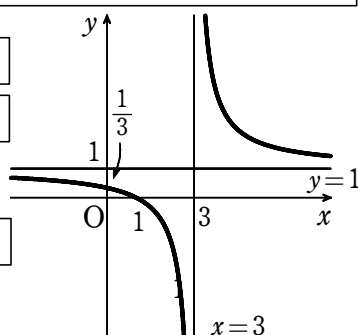
① 例 1) 関数 $y = \frac{2}{x-3} + 1$ のグラフは,

(分母)=0 とすると $x-3=0 \therefore x=3$

≠ に変えると $x \neq 3$

$\frac{2}{x-3}=0$ とすると $\therefore y=1$

≠ に変えると $y \neq 1$



関数 $y = \frac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に 3, y 軸方向に 1

だけ平行移動した直角双曲線で, 漸近線は 2 直線 $x=3$, $y=1$ である。また, 定義域は $x \neq 3$, 値域は $y \neq 1$ である。

※ $x=0$ のとき $y = \frac{2}{-3} + 1 = \frac{1}{3}$,

$y=0$ のとき $0 = \frac{2}{x-3} + 1$ より $0 = 2 + (x-3) \therefore x=1$

グラフは①漸近線にかく
②切片をとる
③象限・漸近線に注意してかく

② 例題 1) 関数 $y = \frac{-2x+3}{x-1}$ のグラフをかけ。また, その定義域と値域を求めよ。

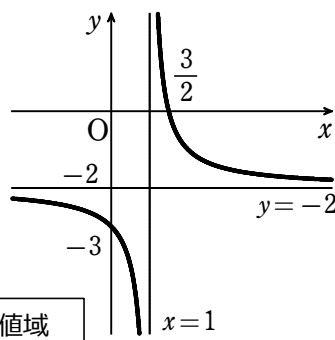
解答 $\frac{-2x+3}{x-1} = \frac{-2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 2$

よって $y = \frac{1}{x-1} - 2$

(分母)=0 とすると $x-1=0 \therefore x=1$

≠ に変えると $x \neq 1$

$\frac{1}{x-1}=0$ とすると $\therefore y=-2$ ≠ に変えると $y \neq -2$



ゆえに, グラフは右の図の直角双曲線で, 漸近線は

2 直線 $x=1$, $y=-2$ である。また,

定義域は $x \neq 1$, 値域は $y \neq -2$ である。

関数と極限【分数関数のグラフと不等式】

【内容目標】 分数関数のグラフを利用して不等式を解こう！

分数関数のグラフと性質

1 分数関数 $y = \frac{k}{x-p} + q$ のグラフは、

$y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で、

漸近線は 2 直線 $x = p$, $y = q$ である。

2 定義域は $x \neq p$, 値域は $y \neq q$ である。

1 例題 2) 不等式 $\frac{4x+3}{2x+3} > x$ を解け。

方針 $y = \frac{4x+3}{2x+3}$ ……① $y = x$ ……②

のグラフの上下関係から考える

解答 $y = \frac{4x+3}{2x+3} = \frac{2(2x+3)-3}{2x+3} = -\frac{3}{2x+3} + 2$

よって $y = -\frac{3}{2x+3} + 2$

①と②の共有点の座標は

$\frac{4x+3}{2x+3} = x$ ……③ の解である

③の両辺に $2x+3$ をかけると $4x+3 = x(2x+3)$

$4x+3 = 2x^2+3x$ すなわち $2x^2-x-3=0$

$(2x-3)(x+1)=0$ $\therefore x = -1, \frac{3}{2}$

求める不等式の解は、①のグラフが②のグラフより上方にあるような x の値の範囲であるから

$x < -\frac{3}{2}, -1 < x < \frac{3}{2}$

別解 $2x+3$ を掛けて両辺を払いたくなるが、負の数を掛けると不等号の向きは変わってしまう

そこで $(2x+3)^2$ を掛けることで処理する

$\frac{4x+3}{2x+3} > x$ に $(2x+3)^2$ を掛けると $(4x+3)(2x+3) > x(2x+3)^2$

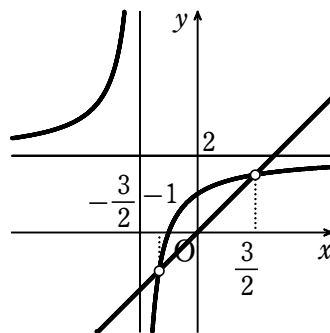
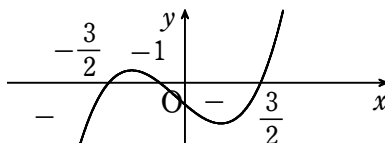
$(4x+3)(2x+3) - 2(2x+3)^2 > 0$ $(2x+3)(4x+3 - x(2x+3)) > 0$

$(2x+3)(-2x^2+x+3) > 0$ $(2x+3)(2x^2-x-3) < 0$

$(2x+3)(2x-3)(x+1) < 0$

$x < -\frac{3}{2}, -1 < x < \frac{3}{2}$

負になる所



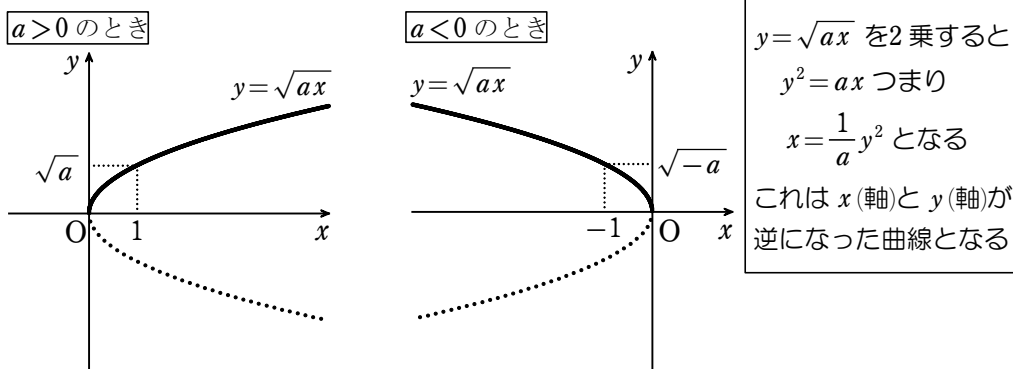
関数と極限【無理関数とそのグラフ】

【内容目標】無理関数の特徴を理解してグラフをかけるようになるう！

$\sqrt{x}$, $\sqrt{3x+1}$ のように、根号の中に文字を含む式を 無理式 といい、 x についての無理式で表された関数を、 x の 無理関数 という。

特に断りがない場合、無理関数の定義域は、根号の中を正または0にする実数全体である。

- ① 一般に、無理関数 $y = \sqrt{ax}$ のグラフは、下の図のようになる。



無理関数 $y = \sqrt{ax}$ については、次のことがいえる。

$a > 0$ のとき	$a < 0$ のとき	
定義域は $x \geq 0$	定義域は $x \leq 0$	$\sqrt{0} \geq 0$ であるから $y = \sqrt{0}$ より $y \geq 0$ である。
値域は $y \geq 0$	値域は $y \geq 0$	
単調に増加する(*)	単調に減少する(*)	

一般に、 $a \neq 0$ のとき $\sqrt{ax+b} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}$ であるから、

$y = \sqrt{ax+b}$ は $y = \sqrt{a(x-p)}$ の形に変形できる。

一般に、無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)}$ について、次のことが成り立つ。

無理関数のグラフと性質

- 無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)}$ のグラフは、 $y = \sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものである。
- $a > 0$ のとき、定義域は $x \geq p$ 、値域は $y \geq 0$ であり、
 $a < 0$ のとき、定義域は $x \leq p$ 、値域は $y \geq 0$ である。

関数と極限【無理関数とそのグラフ】

② 問6) 次の無理関数のグラフをかけ。

定義域は $(\sqrt{\quad}$ の中身) ≥ 0

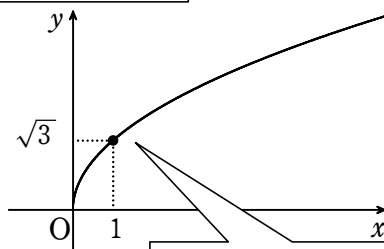
値域は $-\sqrt{\quad} \leq 0$ なので $y \leq 0$

(1) $y = \sqrt{3x}$

定義域は $3x \geq 0 \therefore x \geq 0$

$x=1$ のとき $y = \sqrt{3}$ なので

定義域内の
都合の良い値を

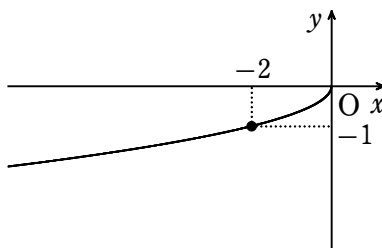


通る点を1つ示す

(4) $y = -\sqrt{-\frac{1}{2}x}$

定義域は $-\frac{1}{2}x \geq 0 \therefore x \leq 0$

$x = -2$ のとき $y = -1$ なので



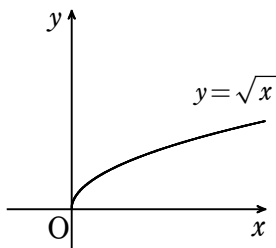
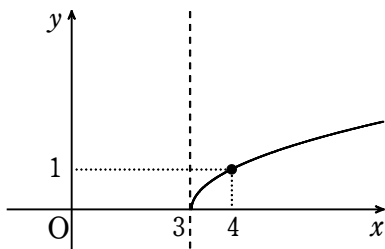
問7) 次の無理関数のグラフをかけ。

定義域は $(\sqrt{\quad}$ の中身) ≥ 0

(1) $y = \sqrt{x-3}$

定義域は $x-3 \geq 0 \therefore x \geq 3$

$x=4$ のとき $y=1$ なので

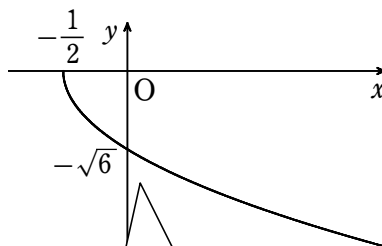


(3) $y = -\sqrt{3x+6}$

定義域は $-\frac{1}{2}x \geq 0 \therefore x \leq 0$

$x=0$ のとき $y = -\sqrt{6}$

$y=0$ のとき $x = -\frac{1}{2}$ なので



y 軸と交わるときは
 y 切片を求めておく
(通る点は y 切片で代替)

関数と極限【無理関数のグラフと不等式】

【内容目標】無理関数の理解してグラフをかけるようになるろう！

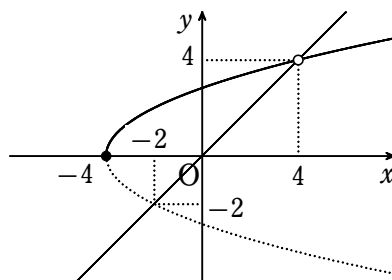
1 例題3) 不等式 $\sqrt{2x+8} > x$ を解け。

$$y = \sqrt{2x+8} \quad \cdots \cdots ①$$

$$y = x \quad \cdots \cdots ②$$

とすると①は $y = \sqrt{2(x+4)}$ であり

定義域 $x+4 \geq 0$ より $x \geq -4$



また、①②を連立すると

$$x = \sqrt{2x+8} \quad \cdots \cdots ③$$

この両辺を2乗すると $x^2 = 2x+8 \quad \therefore x^2 - 2x - 8 = 0$

$$(x-4)(x+2) = 0 \quad \text{より} \quad x = 4, -2$$

このとき、

$x = -2$ は③を満たさないことがグラフより分かる

よって①が②より上方にある範囲はグラフより

$$-4 \leq x < 4$$

共有点の x 座標は
連立方程式の解と
一致する

$$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$$

は成り立つが

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = B$$

は成り立たないため
確認が必要となる

別解

$$y = \sqrt{2x+8} \quad \cdots \cdots ①, \quad y = x \quad \cdots \cdots ②$$

とすると①は $y = \sqrt{2(x+4)}$ であり

定義域 $x+4 \geq 0$ より $x \geq -4$

別解

①より $y = \sqrt{2x+8} \geq 0$ なので
②から $x = y \geq 0$
ゆえに $x = 4$ である

i) $x < 0$ のとき

$$\sqrt{2x+8} \geq 0 \text{ であるから}$$

$$\sqrt{2x+8} \geq 0 > x \text{ となり}$$

与えられた不等式を満たす

$$\therefore -4 \leq x < 0$$

ii) $x \geq 0$ のとき

$$\sqrt{2x+8} > x \text{ の両辺は正になる}$$

よって両辺を2乗しても

大小関係は変わらないので

$$2x+8 > x^2$$

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$(x-4)(x+2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 4$$

条件より $x \geq 0$ であるから

$$0 \leq x < 4$$

i) ii) より $-4 \leq x < 4$

関数と極限【逆関数と合成関数】

【内容目標】逆関数を求められるようになろう！

- ① 一般に、関数 $y = f(x)$ が、増加関数または減少関数であるとき、値域内の y の値を定めるとそれに対応して x の値がただ1つ定まる。すなわち、 x は y の関数である。この関数を $x = g(y)$ で表す。このとき、変数 y と x を入れ替えて得られる関数 $y = g(x)$ を、もとの関数 $f(x)$ の逆関数 といい、 $f^{-1}(x)$ で表す。

関数とその逆関数では、定義域と値域が入れかわる。

- ② 逆関数を求めるための一般的な手順は、次のようになる。

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

1 $y = f(x)$ を x について解き、 $x = g(y)$ の形にする。

2 x と y を入れかえて、 $y = g(x)$ とする。

もとの関数 $f(x)$ と逆関数 $g(x)$ では、定義域と値域も入れ替わる。(文字を変える)

例4) 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y = 5x - 4$

$$-5x = -y - 4$$

$$x = \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}$$

x と y を入れ替えると

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

(2) $y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 2$

定義域 $x \neq 1$ 値域 $y \neq 2$

$$(x-1)y = 2x-3 \quad \text{より} \quad yx - y = 2x-3$$

$$yx - 2x = y-3 \quad (y-2)x = y-3$$

$$y \neq 2 \text{ なので } x = \frac{y-3}{y-2}$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えると } y = \frac{x-3}{x-2}$$

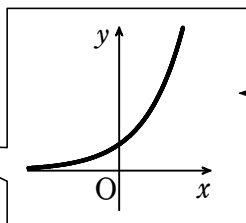
(定義域 $x \neq 2$ 値域 $y \neq 1$)

例5) 次の関数の逆関数を求めよ。

$$y = 2^x$$

定義域 実数全体

値域 $y > 0$ (正の実数全体)



これを x について解くと

$$x = \log_2 y$$

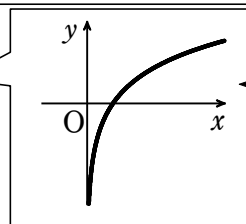
x と y を入れ替えると

$$y = \log_2 x$$

定義域 $x > 0$ (正の実数全体)

値域 実数全体

底^{指数} = 真数 $\Leftrightarrow$ 指数 = $\log_{\text{底}}$ 真数
ただし 底 > 0 , 底 $\neq 1$, 真数 > 0



グラフが
イメージできると
よい

関数と極限【逆関数と合成関数】

例6) $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0$) 値域は $y \geq 1$

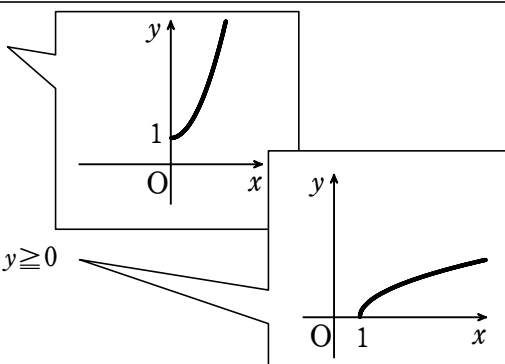
$$x^2 = y - 1$$

$$x = \pm \sqrt{y - 1}$$

$$x \geq 0 \text{ であるから } x = \sqrt{y - 1}$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えると } y = \sqrt{x - 1}$$

また、その定義域は $x \geq 1$ ，値域は $y \geq 0$



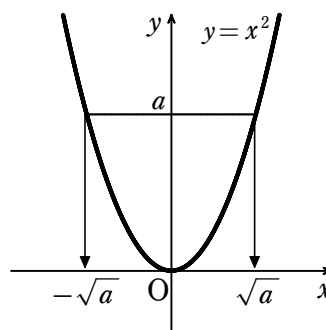
補題 関数が逆関数をもたない場合もある。

例 関数 $y = x^2$ の逆関数

$$y = x^2 \text{ を } x \text{ について解くと } x = \pm \sqrt{y}$$

この場合、 y の値を定めても x の値はただ1つには定まらない。

よって、関数 $y = x^2$ は逆関数をもたない。 終



注意 定義域を制限した関数 $y = x^2$ ($x \geq 0$) は逆関数をもつ。

その逆関数は $y = \sqrt{x}$ である。

問12) 次の関数の逆関数を求め、そのグラフをかけ。

(1) $y = -\sqrt{-x + 4}$

定義域は $-x + 4 \geq 0$ より $x \leq 4$

値域は $y \leq 0$

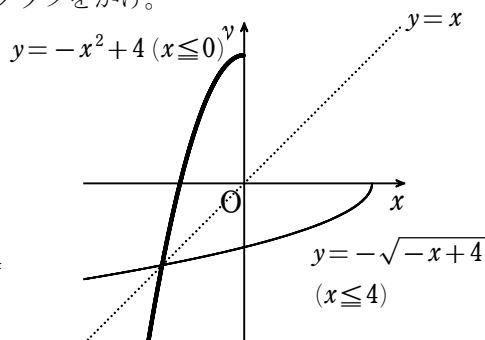
$$2 \text{ 乗して } y^2 = -x + 4$$

$$x = -y^2 + 4$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えると } y = -x^2 + 4$$

また、その定義域は $x \leq 0$ ，

値域は $y \geq 4$



(3) $y = -3^x$

定義域は 実数全体，値域は $y < 0$

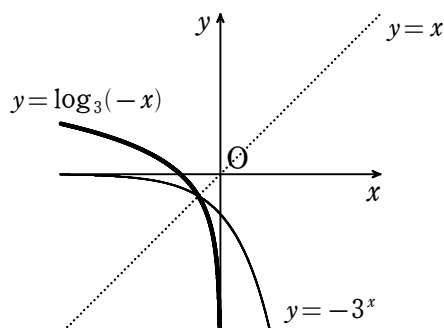
$-y = 3^x$ なので対数の定義より

$$x = \log_3(-y)$$

$$x \text{ と } y \text{ を入れ替えると } y = \log_3(-x)$$

また、その定義域は $x < 0$ ，

値域は 実数全体



関数と極限【合成関数】

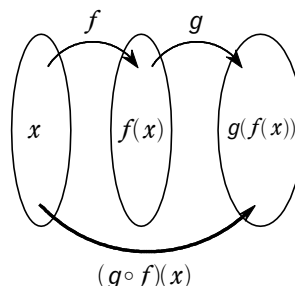
【内容目標】合成関数の考え方を理解しよう！

一般に、2つの関数 $y=f(x)$ 、 $z=g(y)$ があり、 $f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとき、 $g(y)$ に $y=f(x)$ を代入すると、新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる。

この関数を、 $f(x)$ と $g(y)$ の **合成関数** という。

$g(f(x))$ を $(g \circ f)(x)$ とも書く。

注意 一般に、 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は同じ関数ではない。



問 1 3) $f(x)=4x^2$ 、 $g(x)=-\frac{1}{2}(x+1)$ であるとき、合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

注意 $f(x)$ の定義域は実数全体、値域は $y \geq 0$ (正の数全体)。

$g(x)$ の定義域は実数全体、値域は実数全体。

$f(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域に含まれているので $g(f(x))$ は演算可能,

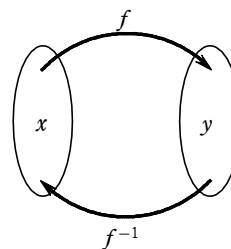
g の値域は f の定義域と一致するので $f(g(x))$ は演算可能,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) & (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= g(4x^2) & &= f\left(-\frac{1}{2}(x+1)\right) \\
 &= -\frac{1}{2}(4x^2+1) & &= 4\left\{-\frac{1}{2}(x+1)\right\}^2 \\
 &= -2x^2 - \frac{1}{2} & &= 4 \cdot \frac{1}{4}(x+1)^2 \\
 & & &= (x+1)^2
 \end{aligned}$$

※ このように、一般に合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は一致しない。

一般に、関数 $y=f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき次の式が成り立つ

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = x \\
 (f \circ f^{-1})(y) &= f(f^{-1}(y)) = y
 \end{aligned}$$



問 1 3) $f(x)=2^x$ 、 $g(x)=\log_2 x$ であるとき、合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) & (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= g(2^x) & &= f(\log_2 x) \\
 &= \log_2 2^x & &= 2^{\log_2 x} \\
 &= x \cdot \log_2 2 & &= x \\
 &= x & &
 \end{aligned}$$

$y = 2^{\log_2 x}$
 両辺に底 2 の対数をとると
 $\log_2 y = \log_2 2^{\log_2 x}$
 $\log_2 y = \log_2 x \cdot \log_2 2$
 $\log_2 y = \log_2 x$
 $\therefore y = x = 2^{\log_2 x}$

※ このように、逆関数の関係のとき

合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は一致する。

関数と極限【数列の極限】

【内容目標】数列の収束・発散の考え方を理解しよう！

数を一列に並べたものを数列といい、数列における各数を項という。数列の項は、最初の項を初項、 n 番目の項を第 n 項という。以下では、項が限りなく続く **無限数列** を考える。

一般に、数列 $\{a_n\}$ において、 n を限りなく大きくするとき、 a_n がある値 α に限りなく近づくならば、 $\{a_n\}$ は α に 収束 する、または $\{a_n\}$ の極限 は α であるという。また、値 α を $\{a_n\}$ の 極限值 ともいう。

このことを、次のように書き表す*。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \alpha$$

* 記号 ∞ は「無限大」と読む。 ∞ は、値すなわち数を表すものではない。(極限值と言わない)

□収束しない数列

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、 $\{a_n\}$ は 発散 するという。発散する数列には、次のように 3 つの場合がある。

[1] 数列 $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$

では、 n を限りなく大きくすると、 2^n の値は、限りなく大きくなる。

[1] のような場合、数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散** する、

または $\{a_n\}$ の **極限は正の無限大** であるといい、次のように書き表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow \infty$$

[2] 数列 $-3, -6, -9, \dots, -3n, \dots$

では、 n を限りなく大きくすると、 $-3n$ の値は

負で、その絶対値は限りなく大きくなる。

[2] のような場合、数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散** する、

または $\{a_n\}$ の **極限は負の無限大** であるといい、次のように書き表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } a_n \rightarrow -\infty$$

[1], [2] の数列については、次のように書き表される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-3n) = -\infty$$

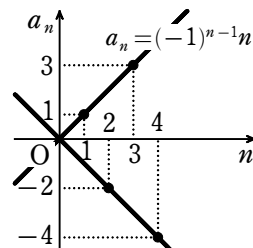
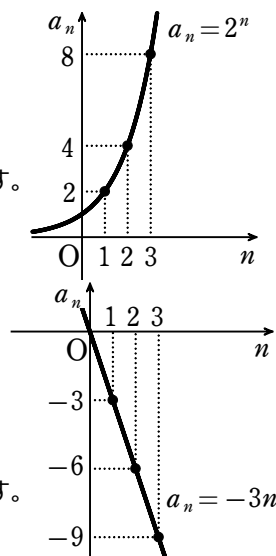
注意 極限が ∞ または $-\infty$ の場合、これらを数列の極限值とはいわない。

[3] 数列 $1, -2, 3, \dots, (-1)^{n-1}n, \dots$

では、 n を限りなく大きくすると、 $(-1)^{n-1}n$ の値は収束しない。

発散する数列が、正の無限大に発散もせず、負の無限大に

発散もしない場合、その数列は **振動** するという。



関数と極限【数列の極限】

数列 $\{a_n\}$ の収束, 発散についてまとめると, 次のようになる。

○数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$	……	極限は α
発散 (収束しない)	正の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$	……	極限は ∞
	負の無限大に発散	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$	……	極限は $-\infty$
	振動		……	極限は ない

例 2)

$$(1) \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (2) \quad -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

0に近づく

なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 0に近づく

なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

例 4)

$$(1) \quad \frac{1+1}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{3+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots \quad (2) \quad -2^0, -2^1, -2^2, \dots, -2^{n-1}, \dots$$

大きくなり続ける 小さくなり続ける

なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2^{n-1}) = -\infty$

問 1)

$$(1) \quad -5, -2, 1, \dots, 3n-8, \dots \quad (2) \quad 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots, 2-\frac{1}{n}, \dots$$

+3されていく⇒大きくなり続ける 引く値が0に近づく⇒2に近づく

なので $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n-8) = \infty$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$

正の無限大に発散する

$$(3) \quad -1, -4, -9, \dots, -n^2, \dots \quad (4) \quad -3, 9, -27, \dots, (-3)^n, \dots$$

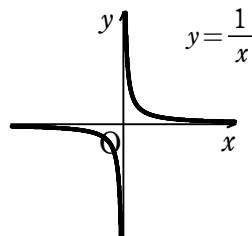
小さくなり続ける

なので $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$ なので 発散(振動)する

負の無限大に発散する

※ グラフをイメージすると良い

⇒ 関数の極限につながる



関数と極限【極限值と四則】

【内容目標】 数列の収束・発散の考え方を理解しよう！

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束するとき, 次のことが成り立つ。

数列の極限の性質 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \alpha \quad \text{ただし, } k \text{ は定数} \quad 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta \quad 4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ただし, } \beta \neq 0$$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ であるとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ は明らかである。しかし, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ についてはいろいろな場合がある

(このようなものを**不定形**という)。よって極限が $\infty - \infty$ や $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ などでは不定形でない

形に式変形する必要がある。なお, ∞ 同士や ∞ と他の数との演算は定義されていないので答案にこのような式を書くのは注意が必要である。

■不定形を解消する方法

◇整式や分数式で表される数列なら…

$\infty - \infty$ となる場合 …… 最高次の項でくれ！

$\frac{\infty}{\infty}$ となる場合 …… 分母の最高次の項で分母・分子を割れ！

◇無理式を含む数列なら…

$\frac{\infty}{\infty}$ となる場合 …… 分母の最高次の項で分母・分子を割れ！

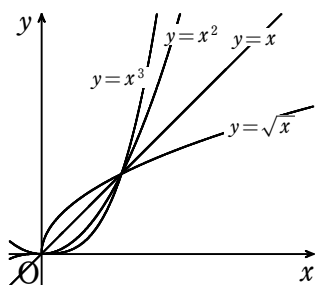
$\infty - \infty$ となる場合 …… $\sqrt{\circ} - \sqrt{\triangle}$ の形に注目し, 分子や分母を有理化せよ！

■ ∞ に発散する速さの違いについて～知っていると答えの予想ができる

○一般に、正の無限大に発散する $n^\bullet$ は, 次数 $\bullet$ が大きいほど速く正の無限大に発散していく

○一般に (n 次関数) $\ll$ (指数関数) $\ll$ (階乗関数) の速さになる

例) $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$, n , n^2 , n^3



$n - n^3 \rightarrow -\infty$
遅速

$\frac{2n^2 - 3n}{n^2 + 1} \leftarrow$ 同じ $\rightarrow 2$
と予想できる

例)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n}$ や $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ などは「はさみうち

の原理」を用いて解く必要があるが、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} \leftarrow \begin{matrix} \text{遅} \\ \text{速} \end{matrix} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \leftarrow \begin{matrix} \text{遅} \\ \text{速} \end{matrix} = 0 \quad \text{と予想できる}$$

関数と極限【極限值と四則】

例) (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 3n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{3}{n}\right)$

$$\boxed{\infty - \infty} = \infty$$

$$\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\infty}{\uparrow} n^2 \times \left(1 - \underset{\downarrow 0}{\frac{3}{n}}\right) \text{なので } \infty \times 1$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 4n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - 4\right)$

$$\boxed{\infty - \infty} = -\infty$$

$$\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\infty}{\uparrow} n^3 \times \left(\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}} - 4\right) \text{なので } \infty \times (-4)$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \left(\frac{1}{n}\right)}$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

← 分母が 0 以外の値に収束する
ように分母と分子を
分母の最高次 n で割る。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{n}\right)}{1 - \left(\frac{2}{n^2}\right)} = 0$ 終

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

← 分母と分子を
分母の最高次 n^2 で割る。

例題) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \quad \boxed{\infty - \infty}$$

解答 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n}$ 分子の有理化

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n) - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}$$

← 分母と分子を
分母の最高次 n で割る。

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{1+1}}$$

関数と極限【数列の極限と大小関係】

【内容目標】「追い越し禁止」と「はさみうちの原理」の考え方を理解しよう！

数列の極限の性質 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする。

5 「追い越し禁止」

すべての n について $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

補足 性質5において、常に $a_n < b_n$ でも、 $\alpha = \beta$ の場合がある。たとえば、

$a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n}$ では、 $a_n < b_n$ であるが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ である。

また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ のとき、すべての n について $a_n \leq b_n$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

6 「はさみうちの原理」

すべての n について $a_n \leq c_n \leq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$

例題) 次の極限を求めよ。ただし、 θ は定数とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}$

角平話

(1) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{2n+1} \leq \frac{(-1)^n}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2n+1} \right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$$

(2) $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

(3) $0 \leq \cos^2 n\theta \leq 1$ であるから

$$0 \leq \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1} = 0$$

関数と極限【無限等比数列】

【内容目標】無限等比数列の収束条件を理解しよう！

初項に一定の数 r (公比) を次々と掛けて得られる項が無限に続く等比数列を **無限等比数列** という。

初項 r , 公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べてみよう。

[1] $r > 1$ のとき $r = 1 + h$ とおくと $h > 0$, $r^n = (1 + h)^n$

$$\begin{aligned} \text{二項定理により} \quad (1 + h)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \cdots + h^n \end{aligned}$$

$h > 0$ であるから $r^n \geq 1 + nh$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

[2] $r = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

[3] $0 < r < 1$ のとき $\frac{1}{r} = s$ とおくと $s > 1$, $r^n = \frac{1}{s^n}$

[1] により, $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s^n} = 0$

[4] $r = 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

[5] $-1 < r < 0$ のとき $-r = s$ とおくと $0 < s < 1$, $|r^n| = s^n$

[3] により, $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ $\leftarrow -|r^n| \leq r^n \leq |r^n|$

[6] $r = -1$ のとき 数列 $\{r^n\}$ は, $-1, 1, -1, \dots$ となる。

よって, 数列 $\{r^n\}$ は振動する。すなわち, 極限はない。

[7] $r < -1$ のとき $-r = s$ とおくと $s > 1$, $r^n = (-1)^n s^n$

[1] により, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ で, 数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互

に変わる。よって, 数列 $\{r^n\}$ は振動する。すなわち, 極限はない。

□[3], [4], [5] より, $-1 < r < 1$ すなわち $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるので

数列 $\{r^n\}$ の極限

$r > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ 正の無限大に発散する

$r = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$

$|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ } 収束する

$r \leq -1$ のとき 振動する …… 極限はない

□[3], [4], [5], [6] より,

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は, $-1 < r \leq 1$ である。

関数と極限【無限等比数列】

例) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$ (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$ (4) $2\left(-\frac{4}{5}\right)^n$

解説

(1) 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3} > 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \infty$

(2) 数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(3) 数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\frac{4}{3} < -1$ であるから、極限はない。振動する。

(4) 数列 $\left\{2\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right\}$ では $\left|-\frac{4}{5}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(-\frac{4}{5}\right)^n = 0$

例) 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

解説

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x-1 \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x \leq 2$$

極限値は

$$-1 < x-1 < 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < 2 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)^n = 0$$

$$x-1=1 \quad \text{すなわち} \quad x=2 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)^n = 1$$

例) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n}$

解説

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \infty$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 0$$

関数と極限【無限等比数列】

例) 数列 $\left\{\frac{r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

(1) $|r| < 1$

(2) $r < -1$

解説

(1) $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \frac{0}{1+0} = 0$$

(2) $r < -1$ のとき、 $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

例) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

解説

与えられた漸化式を変形すると $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

よって、数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は、 $a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$ であるから

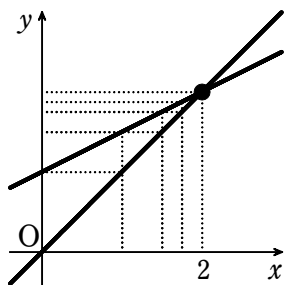
$$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

補足

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ を $y = a_{n+1}$, $y = \frac{1}{2}a_n + 1$ と分け $y = x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$ とみる



連立すると $x = \frac{1}{2}x + 1$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = 2$$

グラフから数列の極限值は交点の x 座標であることがわかる

関数と極限【無限級数】

【内容目標】無限級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになる。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ において、 a_1 をその初項、 a_n を第 n 項という。無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの**部分和** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を第 n 項として、新たに次の無限数列 $\{S_n\}$: $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$ を作る。無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき、すなわち『 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ 』となるとき、無限級数は S に**収束** する、または無限級数の和は S であるという。この和 S も $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表すことがある。

無限級数の和

無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ の第 n 項までの部分和 S_n から作られる

無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき、この無限級数の和は S である。

無限級数の和

= 部分和の極限値

※ 無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数 ① は 発散 するという。

例題) 次の無限級数の収束、発散について調べ、収束すればその和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$

角評説

(1) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)-(2n-1)} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

であるから、第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$

和の一般項を用いて
極限を考えよ！

ゆえに、この無限級数は収束して、その和は $\frac{1}{2}$ である。

(2) $\frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})} = \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$

であるから、第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1) \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1) = \infty$

ゆえに、この無限級数は発散する。

関数と極限【無限等比級数】

【内容目標】無限等比級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになる。

初項が a 、公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad \text{①}$$

を、初項 a 、公比 r の **無限等比級数** という。① の第 n 項までの部分和を S_n とする。

□無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束、発散は、次のようになる。

$a=0$ のとき 収束し、その和は 0 である。

$a \neq 0$ のとき $|r| < 1$ ならば収束し、その和は $\frac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geq 1$ ならば発散する。

また、無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ が収束するための必要十分条件は

$$a=0 \quad \text{または} \quad |r| < 1$$

例題) 次の無限等比級数の収束、発散について調べ、収束する場合は、その和を求めよ。

(1) $1 + \sqrt{2} + 2 + \cdots$

(2) $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \cdots$

(3) $(2 + \sqrt{3}) - (3 + \sqrt{3}) + 6 - \cdots$

(4) $(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 2) + \cdots$

解説

初項を a 、公比を r とする。

(1) $a=1$, $r=\sqrt{2} \div 1 = \sqrt{2}$ であり、 $|r| \geq 1$ であるから、この無限等比級数は発散する。

(2) $a=1$, $r=-\frac{2}{3} \div 1 = -\frac{2}{3}$ であり、 $|r| < 1$ であるから、

この無限等比級数は収束し、その和 S は
$$S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$$

(3) $a=2+\sqrt{3}$, $r=-\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = -3+\sqrt{3}$

公比 r について、 $-3+\sqrt{3} \leq -1$ であるから $|r| \geq 1$

よって、この無限等比級数は発散する。

(4) $a=1+\sqrt{2}$, $r=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$

公比 r について、 $0 < 2-\sqrt{2} < 1$ であるから $|r| < 1$

よって、この無限等比級数は収束し、その和 S は

$$S = \frac{1+\sqrt{2}}{1-(2-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2}$$

関数と極限【無限等比級数】

例題) 次の無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの和を求めよ。

$$x + x(1-x)^2 + x(1-x)^4 + \dots$$

解説

$x \neq 0$ のとき、この無限等比級数の公比は $(1-x)^2$ であるから、

$$\text{収束するための必要十分条件は} \quad 0 \leq (1-x)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq (1-x)^2 \cdots \textcircled{1} \\ (1-x)^2 < 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より $(x-1)^2 \geq 0$ $\therefore$ すべての実数

②より $1-2x+x^2 < 1$ $x^2-2x < 0$ $x(x-2) < 0$ $\therefore 0 < x < 2$

よって $0 < x < 2$

$$\text{このとき、和は} \quad \frac{x}{1-(1-x)^2} = \frac{x}{2x-x^2} = \frac{x}{x(2-x)} = \frac{1}{2-x}$$

$x=0$ のとき、この無限等比級数の各項はすべて 0 になるから収束し、その和は 0 である。

したがって、求める x の値の範囲は $0 \leq x < 2$

また、和は $0 < x < 2$ のとき $\frac{1}{2-x}$, $x=0$ のとき 0

例題) 数直線上で、点 P が原点 O から出発して、正の向きに 1 だけ進み、次に負の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進む。更に、正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み、次に負の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む。以下、このような運動を限りなく続けるとき、点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

解説

点 P の座標は、順に次のようになる。

$$1, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}, \dots$$

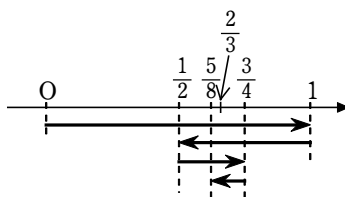
ゆえに、点 P が近づいていく点の座標を x とすると、

x は初項 1 、公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数で表される。

$\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$ であるから、この無限等比級数は収束して

$$x = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

よって、点 P が近づいていく点の座標 x は $x = \frac{2}{3}$

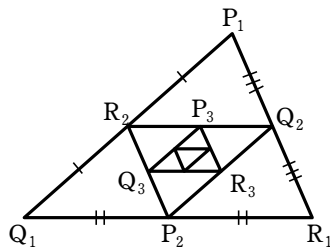


関数と極限【無限等比級数】

例題) 面積が a の $\triangle P_1Q_1R_1$ がある。右の図のように、 $\triangle P_1Q_1R_1$ の各辺の中点を頂点として $\triangle P_2Q_2R_2$ を作り、次に $\triangle P_2Q_2R_2$ の各辺の中点を頂点として $\triangle P_3Q_3R_3$ を作る。

以下、同様にして作られる次の三角形の面積の総和 S を求めよ。

$$\triangle P_1Q_1R_1, \triangle P_2Q_2R_2, \triangle P_3Q_3R_3, \dots, \triangle P_nQ_nR_n, \dots$$



解説

$$\triangle P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1} \sim \triangle P_nQ_nR_n$$

であり、相似比は $1:2$ であるから、面積比は $1^2:2^2$ である。

$$\triangle P_nQ_nR_n \text{ の面積を } S_n \text{ とすると } S_{n+1}:S_n=1^2:2^2 \quad \therefore 2^2S_{n+1}=1^2S_n$$

$$S_{n+1}=\frac{1^2}{2^2}S_n=\frac{1}{4}S_n, \quad S_1=a$$

よって、数列 $\{S_n\}$ は初項 a 、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比数列である。

ゆえに、面積の総和 S は、初項 a 、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数で表され、 $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ であるから収束する。

$$\text{したがって} \quad S=\frac{a}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}a$$

例題) 次の循環小数を分数に直せ。

$$(1) \quad 0.\dot{6}$$

$$(2) \quad 0.4\dot{7}0\dot{2}$$

解説

$$(1) \quad 0.\dot{6}=0.6+0.06+0.006+\dots$$

よって、 $0.\dot{6}$ は初項 0.6 、公比 0.1 の無限等比級数で、 $|0.1| < 1$ であるから、収束して

$$0.\dot{6}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

$$(2) \quad 0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+0.0702+0.000702+\dots$$

この右辺の第2項以下は、初項 0.0702 、公比 0.001 の無限等比級数で、 $|0.001| < 1$ であるから、収束して

$$\begin{aligned} 0.4\dot{7}0\dot{2} &= 0.4 + \frac{0.0702}{1-0.001} = \frac{4}{10} + \frac{0.0702}{0.999} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{702}{9990} = \frac{4698}{9990} = \frac{87}{185} \end{aligned}$$

関数と極限【いろいろな無限級数】

【内容目標】無限級数の性質を用いて、和や収束・発散を考えよう。

無限級数の和の性質

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束する無限級数で、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ とするとき、

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + lb_n)$ は収束して $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + lb_n) = kS + lT$ ただし、 k, l は定数

例題 10) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ の和を求めよ。

$$\frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} = \left(\frac{2}{6}\right)^n + \left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ なので } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ は、初項 } \frac{1}{3},$$

公比 $\frac{1}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ は、初項 $\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数である。公比は、 $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$,

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ であるから、この 2 つの無限等比級数はともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{よって } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

□ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の第 n 項までの部分和を S_n とするとき、

$$n \geq 2 \text{ ならば } S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n \text{ よって } a_n = S_n - S_{n-1}$$

この無限級数が収束するとき、その和を S とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

ゆえに、次の 1 が成り立ち、その対偶として、直ちに 2 が導かれる。

無限級数の収束と発散 1 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\implies$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

一般に、逆は成り立たない ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であっても、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない)

例題) 次の無限級数の収束、発散を調べよ。ただし、第 n 項を a_n とする。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n}$$

解答 数列 $\{a_n\}$ は振動し、

0 に収束しない。

よって、この無限級数は発散する。

$$\begin{aligned} \text{解答 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \neq 0 \end{aligned}$$

よって、この無限級数は発散する。

関数と極限【関数の極限】

【内容目標】関数の極限の計算ができるようになる。

□ 関数の極限とその性質

一般に、関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、この値 α を $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の **極限值** または **極限** という。このことを、次のように書き表す。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

数列の場合と同様に、関数の極限について、次のことが成り立つ。

○ **極限值と四則** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha \quad \text{ただし, } k \text{ は定数} \quad 2 \quad \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta \quad 4 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ただし, } \beta \neq 0$$

例) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} (x - 3)(x + 2)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x}$$

【解答】 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x - 1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1 = -2$

基本的には代入して求める

$$(2) \lim_{x \rightarrow -2} (x - 3)(x + 2) = (-2 - 3) \cdot (-2 + 2) = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{0+1}{2 \cdot 0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}$$

例) 不定形となるとき (分数関数) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} \right) \quad \boxed{\infty - \infty}$$

【解説】

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

因数分解→約分して不定形を解消する

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ \frac{2+x}{2(2+x)} - \frac{2}{2(2+x)} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{(2+x)-2}{2(2+x)} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{2(2+x)} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+x)} = \frac{1}{4}$$

通分→約分して不定形を解消する

関数と極限【関数の極限】

例) 不定形となるとき (無理関数を含むとき) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad \left\{ \frac{0}{0} \right\}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad \left\{ \frac{0}{0} \right\}$$

角評説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

分母or分子の有理化で
不定形を解消する

$$(2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-2^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = 4$$

□ 極限值による定数の決定

例えば $\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x} + b) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{a\sqrt{x} + b}{x-1} \cdot (x-1) \right\} = 2 \cdot 0 = 0$ であるから, $\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x} + b) = 0$

が成り立つ。つまり $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ このことを利用する。

応用例題 1) 次の等式が成り立つように, 定数 a, b の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x-1} = 2$$

解答

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x-1} = 2 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つとする。 **分母** $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ であるから

$$\text{分子} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x} + b) = 0$$

よって, $a + b = 0$ となり $b = -a \quad \dots\dots ②$

このとき $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$ ②代入 $\rightarrow \frac{0}{0}$ の不定形に

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

有理化

$$\begin{aligned} & \text{約分} \quad = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x}+1} \\ & = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

これで代入しても
不定形でなくなった

$\frac{a}{2} = 2$ のとき ① が成り立つから $a = 4$

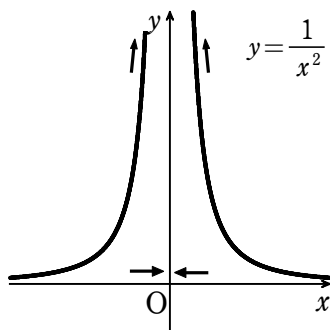
このとき, ② から $b = -4$ 答 $a = 4, b = -4$

関数と極限【関数の極限】

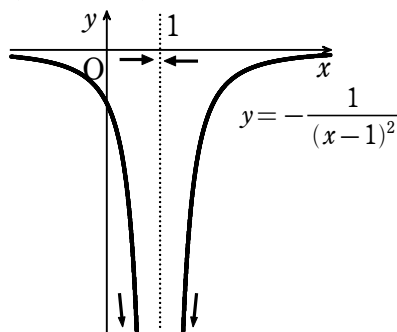
□ 極限が有限な値でない場合

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は **正の無限大に発散** する」または「 $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の 極限は ∞ である」といい、「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 」や「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \infty$ 」のように書き表す。また、 x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば、「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は **負の無限大に発散** する」または「 $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限は $-\infty$ である」といい、「 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 」や「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow -\infty$ 」のように書き表す。 **注意** 極限が ∞ または $-\infty$ の場合、これらに関数の極限值とはいわない。

例) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

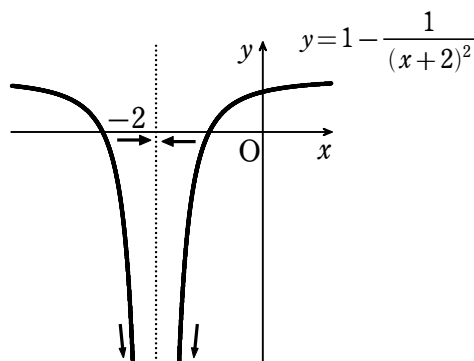


$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ -\frac{1}{(x-1)^2} \right\} = -\infty$$



問4) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left\{ 1 - \frac{1}{(x+2)^2} \right\} = -\infty$$

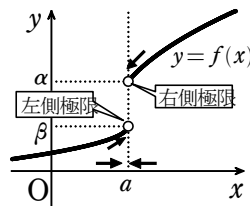


関数と極限【片側からの極限】

【内容目標】 右側極限・左側極限の考え方を理解して求められるようになろう。

関数 $f(x)$ において, x が a に限りなく近づくとき, $x > a$ あるいは $x < a$ など片側の範囲だけで極限を考える場合がある。

一般に, $x > a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば, α を x が a に近づくときの $f(x)$ の **右側極限** といい, 「 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$ 」のように書き表す。



$x < a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの **左側極限** も同様に定義され, その極限值が β のとき, 「 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta$ 」のように書き表す。

右側極限, 左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合には, たとえば $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$ のように書き表す。

$a=0$ のときは, $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow a-0$ をそれぞれ「 $x \rightarrow +0$ 」「 $x \rightarrow -0$ 」のように書く。

関数 $f(x)$ において, 次のことが成り立つ。

$$\left[\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \right]$$

両側からの極限が
等しいときに
「極限が存在する」
と言える

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ がともに存在してもそれらが一致しないと

きもある。このとき, $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限はない。

例題) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x}$

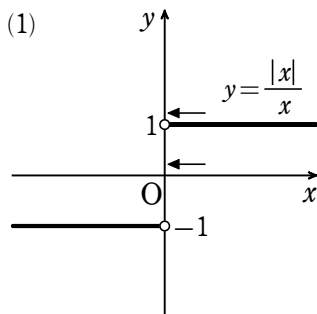
(2) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2-4}{|x-2|}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2+0} [x]$

解法解説

(1) $x > 0$ のとき $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

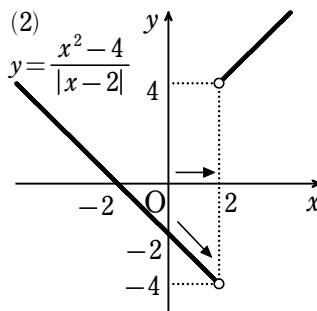
よって $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$



(2) $x < 2$ のとき

$$\frac{x^2-4}{|x-2|} = \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)} = -x-2$$

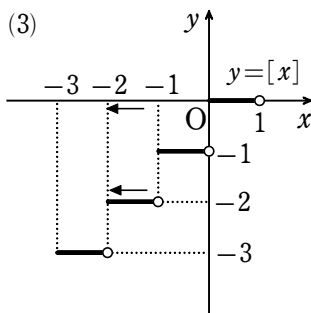
よって $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (-x-2) = -4$



関数と極限【片側からの極限】

(3) $-2 \leq x < -1$ のとき $[x] = -2$

よって $\lim_{x \rightarrow -2+0} [x] = \lim_{x \rightarrow -2+0} (-2) = -2$



例題) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1}$

解説

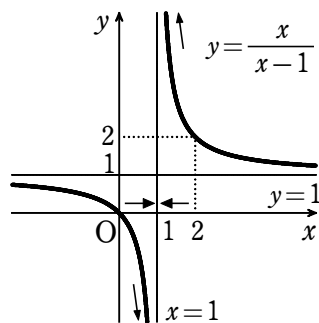
$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

(1) $x \rightarrow 1+0$ のとき $\frac{1}{x-1} \rightarrow \infty$

よって $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \infty$

(2) $x \rightarrow 1-0$ のとき $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$

よって $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$



関数と極限【 $x \rightarrow \pm \infty$ のときの極限】

【内容目標】 $x \rightarrow \infty$ や $x \rightarrow -\infty$ のときの極限値を求められるようになろう。

変数 x が限りなく大きくなることを, $x \rightarrow \infty$ で書き表す。また, x が負で, その絶対値が限りなく大きくなることを, $x \rightarrow -\infty$ で書き表す。

一般に, $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば, この値 α を $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の 極限値 または 極限 という。このことを, 次のように書き表す。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$$

$x \rightarrow -\infty$ のときも同様に考える。たとえば, 次のようになる。

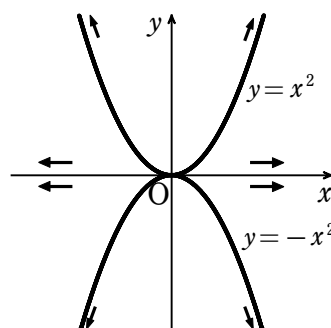
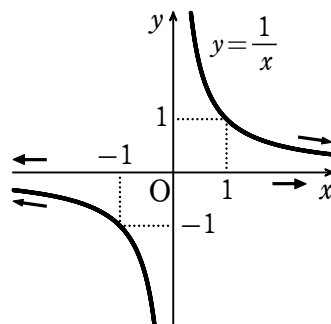
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$x \rightarrow \infty$ や $x \rightarrow -\infty$ のときに, 関数 $f(x)$ の極限が ∞ または $-\infty$ になる意味も, $x \rightarrow a$ のときと同様に考える。

たとえば, 次のようになる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$



例題2 (類題) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3+1}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^2)$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+1)$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4-2)$

解説

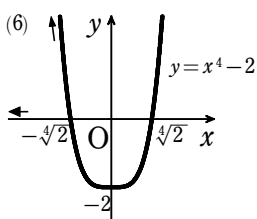
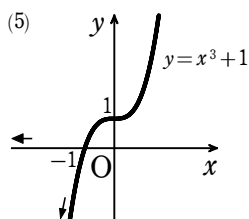
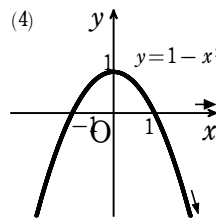
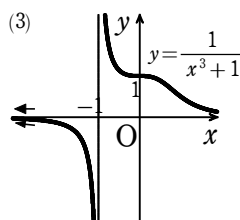
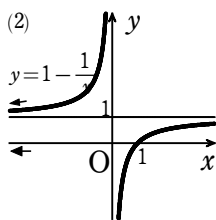
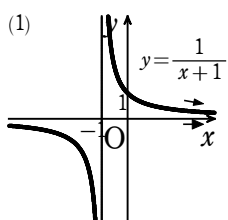
(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0 \leftarrow \frac{\text{定数}}{\infty}$ の形 (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \leftarrow \frac{\text{定数}}{-\infty}$ の形 (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3+1} = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^2) = -\infty$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+1) = -\infty$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^4-2) = \infty$

参考



関数と極限【 $x \rightarrow \pm \infty$ のときの極限】

例題 2 (類題) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2 + 1}$$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}} = 2$$

← 分母の極限が有限な値
となるように分母と分子を
 x^2 で割る。

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \infty$$

← 分母と分子を
分母の最高次 x で割る。

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

← 分母と分子を
分母の最高次 x^2 で割る。

例題 2・3 (類題) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x)$$

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x)(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x}$$

分子の有理化

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1}$$

$$= -1$$

分母分子を x で割る

(2) **方針** $x \rightarrow -\infty$ だと考えづらいので変換する

$x = -t$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} + 2x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2 - 2t} - 2t)$$

分子の有理化

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2 - 2t} - 2t)(\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t)}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{4t^2 - 2t} + 2t}$$

分母分子を t で割る

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{4 - \frac{2}{t}} + 2} = -\frac{1}{2}$$

関数と極限【 $x \rightarrow \pm \infty$ のときの極限】

例8(類題) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x$

(4) $\lim_{x \rightarrow +0} \log_{\frac{1}{3}} x$

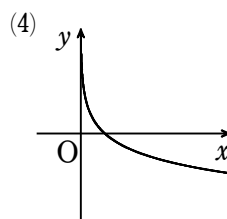
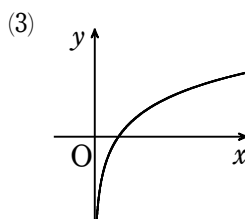
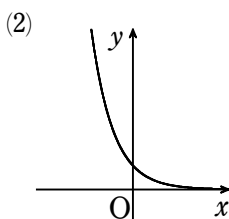
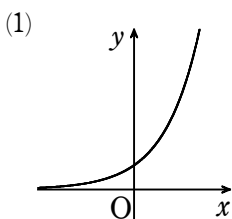
解説

(1) 底 2 は, $2 > 1$ であるから $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$

(2) $3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 底 $\frac{1}{3}$ は, $0 < \frac{1}{3} < 1$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

(3) 底 2 は, $2 > 1$ であるから $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x = \infty$

(4) 底 $\frac{1}{3}$ は, $0 < \frac{1}{3} < 1$ であるから $\lim_{x \rightarrow +0} \log_{\frac{1}{3}} x = \infty$



例8(類題) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^{2x})$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(4x+1) - \log_2(x-1)\}$

解説

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^{2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 4^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4^x \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1 \right\} = -\infty$

速いほうでくる

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(4x+1) - \log_2(x-1)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x+1}{x-1}$

対数の性質

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(4 + \frac{5}{x-1} \right)$

$= \log_2 4$

$= 2$

$\frac{4(x-1)+5}{x-1}$

別解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(4x+1) - \log_2(x-1)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

$= \log_2 4 = 2$

関数と極限【三角関数と極限】

【内容目標】 三角関数を用いた極限を求められるようになろう。

三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は周期関数であり, 2π ごとに同じ値を繰り返すから, $x \rightarrow \infty$ のときの関数の値は一定の値に近づかない。

すなわち, $x \rightarrow \infty$ のときの

$\sin x$, $\cos x$ の極限はない。

また, $\tan x$ については, 次のことがいえる。

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$$

注意 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない。

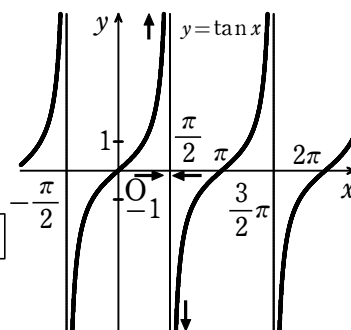
例) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{1}{x} \right) = 1$ 終

0に近づく



注意 遠くにいく ($x \rightarrow \pm \infty$) より 近くに来る方が処理しやすかったりする。

そこで $\frac{1}{x} = t$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ よって $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 0$

問) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x$

解答

(1) $\frac{1}{x} = \theta$ とおくと, $x \rightarrow -\infty$ のとき $\theta \rightarrow -0$

よって $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow -0} \sin \theta = 0$

(2) $\frac{1}{x} = \theta$ とおくと, $x \rightarrow \infty$ のとき $\theta \rightarrow +0$

よって $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \cos \theta = 1$

(3) $\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = 0$

関数と極限【三角関数と極限】

関数の極限には、次の性質もある。

関数の極限の性質 (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とする。

【追い越し禁止】 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leq g(x)$ ならば $\alpha \leq \beta$

【はさみうちの原理】 $x = a$ の近くで常に

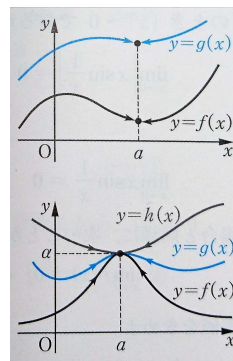
$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ かつ } \alpha = \beta \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$$

※「 $x = a$ の近くで」を「十分大きい x で」と読みかえると、

$x \rightarrow \infty$ のときにも成り立つ。同様に、 $x \rightarrow -\infty$ のときにも成り立つ。

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ のとき、次のことも成り立つ。

$$\text{十分大きい } x \text{ で常に } f(x) \leq g(x) \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$



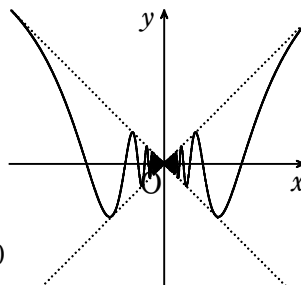
例 9) 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ を求めよ。

【解答】 $0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ より $0 \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

すなわち $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

ここで、 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ であるから $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$

よって $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$



【注意】 数列の場合と同様に、次のことが成り立つ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

□ **【重要】** $\frac{\sin x}{x}$ の極限

【証明】 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき 右の図のように、半径が 1、中心角が

x ラジアン の扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると、面積について

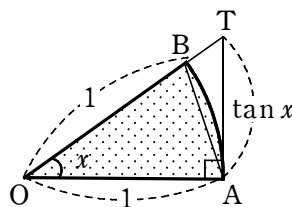
$$\triangle OAB < \text{扇形 OAB} < \triangle OAT$$

が成り立つから $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

すなわち $\sin x < x < \tan x$

$\sin x > 0$ より $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

よって $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$



← 各辺を $\sin x$ で割った。

関数と極限【三角関数と極限】

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ であるから、①により

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x) \quad \text{すなわち} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

以上から、 $x=0$ の近くで $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ であることと、はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{不定形 } \frac{0}{0} \text{ の解消} \end{array} \right.$$

$$\lim_{\substack{\bullet \rightarrow 0 \\ \blacksquare}} \frac{\sin \blacksquare}{\bullet} = 1 \quad (\bullet \rightarrow 0 \text{ のとき } \blacksquare \rightarrow 0) \quad \text{※上下同じ式！}$$

$$\text{他にも } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

などはよく見る式である。

例題) 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x}$$

帳尻合わせ

解答 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right)$ 上下同じ式に

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{x} + \frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} + 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}} \\ &= \frac{7 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 6 \end{aligned}$$

別解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 7x}{\sin 2x} + \frac{\sin 5x}{\sin 2x} \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} + \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \right) \\ &= \frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

関数と極限【三角関数と極限】

類問 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$x \rightarrow 0$ のときははさみうちの原理で

解説

$$(1) \quad x - \frac{\pi}{2} = \theta \text{ とおくと } x = \theta + \frac{\pi}{2} \text{ であり, } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \theta \rightarrow 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin \theta}{\theta}\right) = -1$$

$$(2) \quad \frac{1}{x} = \theta \text{ とおくと, } x \rightarrow \infty \text{ のとき } \theta \rightarrow +0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

例題 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x + 1} \right) = -1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

いかにして $\frac{\sin x}{x}$ の形を作るか

$\Rightarrow \cos \theta$ がらみは

$$\begin{aligned} \cdot (\cos x + 1)(\cos x - 1) &= \cos^2 x - 1 \\ &= -\sin^2 x \end{aligned}$$

$$\cdot \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

などを活用する!

ここは代入しても問題ない

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

解答 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x}{\sin x} \cdot (1 + \cos x) \right\} = 1 \cdot 2$$

$$= 2$$

ここは代入しても問題ない

関数と極限【三角関数と極限】

応用例題 6 + α) 半径 1 の円 O の周上に、定点 A がある。円周上の点 B から OA に下ろした垂線を BH とする。また、 A における円 O の接線に、 A と異なる円周上の点 B から垂線 BQ を下ろす。ただし、 $0 < \angle AOB < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\angle AOB = \theta$ とするとき BH , BQ を θ を用いて表せ。

(2) θ が 0 に限りなく近づくとき、 $\frac{AH}{\theta^2}$ の極限を求めよ。

(3) B が A に限りなく近づくとき、 $\frac{AQ^2}{BQ}$ の極限を求めよ。

問 3) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{BH^2}$ を求めよ。

解説

(1) $AQ = BH = \sin \theta$

$BQ = HA = OA - OH = 1 - \cos \theta$

(2) $AH = OA - OH = 1 - \cos \theta$

B が A に限りなく近づくときは $\theta \rightarrow +0$

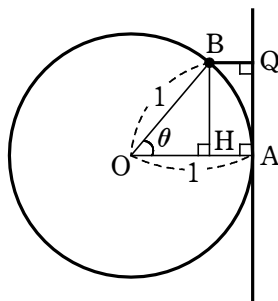
したがって

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{1 + \cos \theta} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{1+1} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AQ^2}{BQ} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 - \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} (1 + \cos \theta) = 2 \end{aligned}$$

問 3) $BH = \sin \theta$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{BH^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



関数と極限【関数の連続性】

【内容目標】 定義域におけるグラフが切れ目のない曲線になる関数の性質を理解しよう。

□関数の連続性

x の整式で表された関数 $f(x)$ については、定義域内の値 a に対して図 1 のように

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つ。このことは、 $y = f(x)$ のグラフが切れ目のない曲線になっているということでもある。しかし、これらのことが成り立たない関数もある。(図 2 は極限が存在しない。図 3 は極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は存在するが、その値が $f(a)$ と等しくない)

は存在するが、その値が $f(a)$ と等しくない)

一般に、関数 $f(x)$ において、その定義域内の x の値 a に対して、極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、かつ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が

成り立つとき、「 $f(x)$ は $x = a$ で **連続** である」という。

このとき、 $y = f(x)$ のグラフは $x = a$ でつながっている。

注意 関数 $f(x)$ が指数関数、対数関数、三角関数、分数関数で

あるとき、 $f(x)$ はその定義域内のすべての x の値で連続である。

注意 値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは、それぞれ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$

または $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ が成り立つならば、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

注意 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続でないとき、 $x = a$ で **不連続** であるという。

このとき、そのグラフは $x = a$ で切れている。

補足 関数の極限の性質により、関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ がともに $x = a$ で連続ならば、

次の関数はいずれも $x = a$ で連続である。

$$kf(x), f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$$

(ただし、 k は定数であり、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a) \neq 0$ とする)

値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは、それぞれ

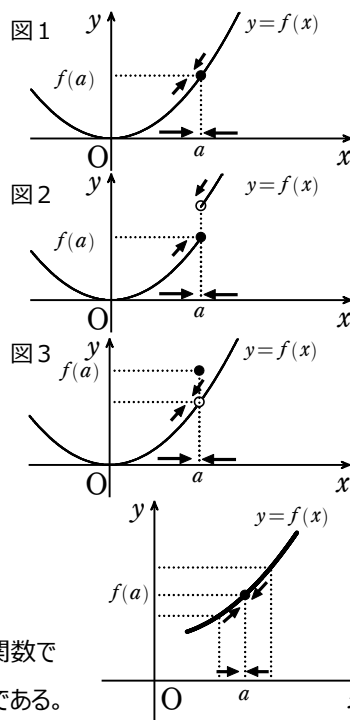
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$$

が成り立つならば、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。

各点連続「 $f(x)$ が $x = a$ で連続」

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ が存在する} \quad \times \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \\ \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

■ 視覚的には「 $y = f(x)$ が $x = a$ でつながっている」ということ ■



関数と極限【関数の連続性】

□区間における連続

集合 $\{x \mid a < x < b\}$, $\{x \mid a \leq x \leq b\}$, $\{x \mid a \leq x\}$, $\{x \mid x < b\}$ など **区間** といい, それぞれ (a, b) , $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ のように書き表す。実数全体の集合は, $(-\infty, \infty)$ で表す。

また, 区間 (a, b) を **開区間** といい, 区間 $[a, b]$ を **閉区間** という。関数 $f(x)$ が, ある区間のすべての x の値で連続であるとき, $f(x)$ はその **区間で連続** であるという。また, 定義域内のすべての x の値で連続な関数を **連続関数** という。

一般に, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば, 次の関数はいずれも区間 I で連続である。ただし, k は定数とする。 $kf(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ また, 関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x) = 0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され, それらの各区間で連続である。

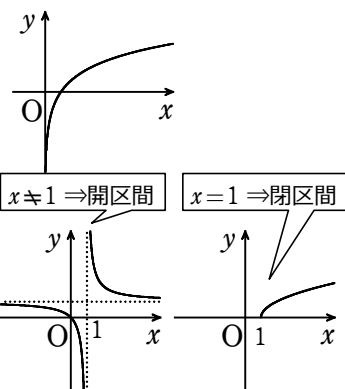
定義域に制限なし $\Rightarrow$ 実数全体

例 (1) x の整式で表された関数や, 指数関数 2^x , 三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は, 区間 $(-\infty, \infty)$ で連続である。

(2) 対数関数 $\log_2 x$ は, 区間 $(0, \infty)$ で連続である。

(3) 分数関数 $\frac{x}{x-1}$ は, 実数全体のうち, $x=1$ を除いた 2 つの区間 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ のそれぞれで連続である。

(4) 無理関数 $\sqrt{x-1}$ は, 区間 $[1, \infty)$ で連続である。



例題) 次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x) = \sqrt{1-x}$

(2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

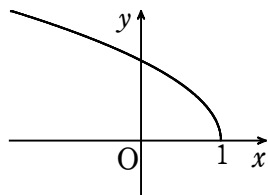
解説

(1) $f(x) = \sqrt{-(x-1)}$

定義域 $1-x \geq 0$ より $x \leq 1$ 定義域を区間にする

よって 関数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ が

連続である区間は $(-\infty, 1]$

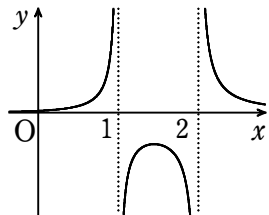


(2) $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

定義域は $x \neq 1$, $x \neq 2$ 定義域を区間にする

関数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ が

連続である区間は $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$



関数と極限【連続関数の性質】

□連続関数の性質

【最大値・最小値の原理】 <Weierstrass>

閉区間で連続な関数は、その区間で最大値および最小値をもつ。

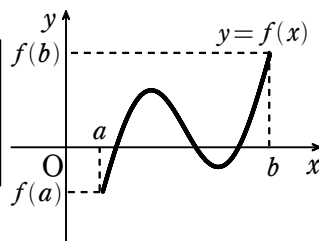
別紙参照

【中間値の定理】

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して $f(c) = k$, $a < c < b$ を満たす実数 c が少なくとも1つある。

中間値の定理から、次に述べるように、方程式の実数解の範囲を推測するための重要な事実が導かれる。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば、方程式 $f(x) = 0$ は $a < x < b$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。



例題 次の関数は最大値、最小値をもつか。もしもつならば、その値を求めよ。

(1) $y = \log_3 x$ ($1 \leq x \leq 9\sqrt{3}$)

(2) $y = -\cos 2x$ ($0 < x < \pi$)

解答 (1) $y = \log_3 x$ ($1 \leq x \leq 9\sqrt{3}$) は、閉区間 $[1, 9\sqrt{3}]$ で連続であるから、この区間で最大値および最小値をもつ。

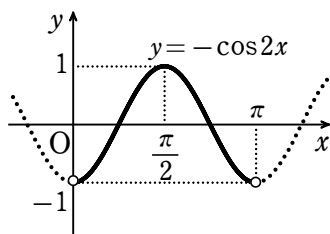
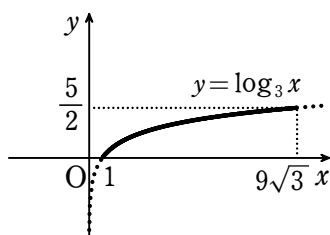
$x = 9\sqrt{3}$ のとき 最大値 $\frac{5}{2}$

$x = 1$ のとき 最小値 0

(2) $y = -\cos 2x$ ($0 < x < \pi$) の値域は $-1 < y \leq 1$ であるから

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 1

最小値はもたない



例題 方程式 $2^x - 3x = 0$ は $3 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

解説

$f(x) = 2^x - 3x$ とおくと、関数 $f(x)$ は区間 $[3, 4]$ で連続であり、かつ

$f(3) = 2^3 - 3 \cdot 3 = -1 < 0$

$f(4) = 2^4 - 3 \cdot 4 = 4 > 0$

したがって、方程式 $f(x) = 0$ すなわち $2^x - 3x = 0$ は $3 < x < 4$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

参考 $y = 2^x$, $y = 3x$ のグラフはそれぞれ

右の図のようになる。

