積分とその応用【不定積分とその基本公式】

□不定積分

基本数Ⅱと同じ

数学Ⅱで学んだように，x で微分すると $f(x)$ になる関数があれば，その関数を $f(x)$ の **原始関数** という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，すなわち $F'(x)=f(x)$ のとき，任意の定数 C に対して $\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$ が成り立つから，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。

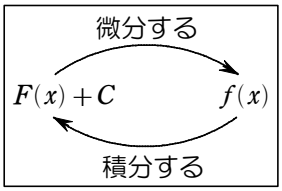
また，$F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば，$G'(x)=F'(x)$ となるから，$G(x)=F(x)+C$ を満たす定数 C が存在する。

以上からわかるように，関数 $f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある。その 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数全体は，次の形に書き表される。

$F(x)+C$　　C は任意の定数

この表示を $f(x)$ の **不定積分** といい*，$\int f(x)dx$ で表す。

*不定積分と原始関数を区別せずに同じ意味で用いることもある



関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する** といい，上の定数 C を **積分定数** という。また，$f(x)$ を **被積分関数** といい，x を 積分変数 という。

$f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$\int f(x)dx=F(x)+C$　　ただし，C は積分定数

注意 今後，「C は積分定数」の断りを省略する。

関数の不定積分を求めるには，導関数の公式が逆に利用される。

実数 α について $(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha}$ $\Rightarrow$ $\int(x^{\alpha+1})'dx=(\alpha+1)\int x^{\alpha}dx$

$$x^{\alpha+1}+C_1=(\alpha+1)\int x^{\alpha}dx$$

$$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C=\int x^{\alpha}dx$$

$\frac{C_1}{\alpha+1}=C$ とする

$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\int(\log|x|)'dx=\int\frac{1}{x}\,dx$

$$\log|x|+C=\int\frac{1}{x}dx$$

x^{α} の不定積分

$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$　　ただし，$\alpha\neq-1$

$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

真数条件を満たすように $|x|$ とする

注意

$\int\frac{1}{f(x)}dx$ を $\int\frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある

$\frac{1}{\bigcirc+1}x^{\bigcirc+1}$

①1加える

②分母に出す

積分とその応用【不定積分とその基本公式】

□不定積分の基本性質

関数の定数倍および和，差の不定積分

1　$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　　ただし，k は定数

2　$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3　$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

注意　上のように書いた不定積分についての等式では，両辺の積分定数の違いは無視することにする。

注意　不定積分を求める計算では，記号 $\int$ が取れた段階で積分定数 C をつければよい。

また，$\int 1dx$ は 1 を省略して $\int dx$ と書くことがある。

参考　積分変数として，x 以外の文字を用いることもある。　$\int$(● の関数)d●

例）次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int x^4dx$　　(2)　$\int \frac{dy}{y^5}$　　(3)　$\int x^{\frac{1}{3}}dx$

(4)　$\int \sqrt[4]{t}\,dt$　　(5)　$\int x\sqrt{x}\,dx$　　(6)　$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{dx}{y^5}$ だと　$\frac{1}{y^5}\int dx=\frac{1}{y^5}x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\int x^4dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

(2)　$\int \frac{dy}{y^5}=\int y^{-5}dy=\frac{1}{-5+1}y^{-5+1}+C=-\frac{1}{4}y^{-4}+C=-\frac{1}{4y^4}+C$

(3)　$\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$

$\frac{1}{○+1}x^{○+1}$　①1加える　②分母に出す

(4)　$\int \sqrt[4]{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}t^{\frac{1}{4}+1}+C=\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{5}t\sqrt[4]{t}+C$

(5)　$\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

(6)　$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$

積分とその応用【不定積分とその基本公式】

例）次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int \left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x-3x^2}{\sqrt{x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx$

(解説)

(1) $\displaystyle\int \frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx=\int \frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^3}dx$

$\displaystyle=\int \left(1-\boxed{\frac{2}{x}}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$

$\displaystyle=\int dx-2\int \frac{dx}{x}-3\int x^{-2}dx+6\int x^{-3}dx$

$\displaystyle=x-2\log|x|+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+C$

分数式は整式にして単項式ごとにみる

$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ だけは $\log|x|$ への流れ

略しても良い

(2) $\displaystyle\int \left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int \left(9x^4-6x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle=9\int x^4dx-6\int xdx+\int x^{-2}dx$　略しても良い

$\displaystyle=\frac{9}{5}x^5-3x^2-\frac{1}{x}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x-3x^2}{\sqrt{x}}dx=\int \left(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=2\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{2}}dx$　略しても良い

$\displaystyle=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$\displaystyle=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx=\int \frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x}dx$

$\displaystyle=\int \left(\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\boxed{\frac{1}{x}}\right)dx$

$\displaystyle=\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int \frac{dx}{x}$　略しても良い

$\displaystyle=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+6x^{\frac{1}{2}}+\log|x|+C$

関数 $\dfrac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}$ において $x>0$ であるから

$\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+3x+6\sqrt{x}+\log x+C$

絶対値の中身の正負が決まるケース

積分とその応用【不定積分とその基本公式】

□三角関数，指数関数の不定積分

微分にて次の公式を学んだ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\log a$

これらから，次の公式が得られる。

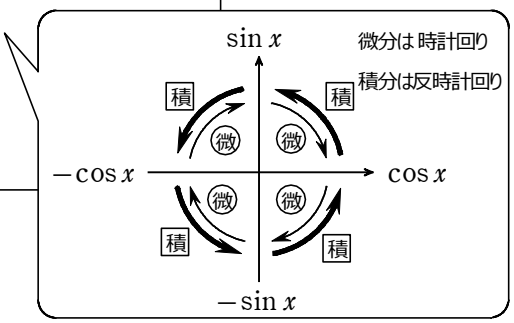
三角関数，指数関数の不定積分

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C,\quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$

$\int \tan x\,dx$ は のちほど



例） (1) $\displaystyle\int(2\sin x+3\cos x)dx=2\int \sin x\,dx+3\int \cos x\,dx$

$$=-2\cos x+3\sin x+C$$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\tan x-x+C$$

$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ より $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

(3) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx=\int\left(2\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$$=2\sin x-\tan x+C$$

(3) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta-1}=-\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$=-\tan\theta+C$$

(4) $\displaystyle\int(2-\tan\theta)\cos\theta\,d\theta=\int(2\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$$=2\sin\theta+\cos\theta+C$$

(4) $\displaystyle\int(3e^x-2^x)dx=3\int e^x dx-\int 2^x dx$

$$=3e^x-\frac{2^x}{\log 2}+C$$

終

積分とその応用【置換積分法】

□$f(ax+b)$ の不定積分～「□が x だったら良いのにな」の□が１次式のとき

a，b は定数とする。関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を利用して，合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分を求めよう。

$u=ax+b$ とすると $\dfrac{d}{du}F(u)=f(u)$ であるから，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}F(ax+b)=\frac{d}{du}F(u)\cdot\underline{\underline{\frac{d}{dx}(ax+b)}}$$

置き換えの微分

$$=af(ax+b)$$

両辺を積分すると

$$\frac{d}{dx}\int F(ax+b)dx=a\int f(ax+b)dx$$

$$\therefore\quad F(ax+b)+C_1=a\int f(ax+b)dx$$

よって，次の公式が得られる。

$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$a\neq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b)dx=\left(\frac{1}{a}\right)F(ax+b)+C$$

$ax+b$ が x だったら良いのに…

⇩

$(ax+b)'=a$ なので $\dfrac{1}{a}$ をかける

例５ (1) $\displaystyle\int\sqrt{3x+2}\,dx=\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$3x+2$ が x だったら良いのに…

⇩

$(3x+2)'=3$ なので $\dfrac{1}{3}$ をかける

$$=\frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$$

(2) $\displaystyle\int\cos 4x\,dx=\left(\frac{1}{4}\right)\sin 4x+C$

$4x$ が x だったら良いのに…

⇩

$(4x)'=4$ なので $\dfrac{1}{4}$ をかける

(3) $\displaystyle\int e^{1-2x}dx=\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-2x}+C$

$1-2x$ が x だったら良いのに…

⇩

$(1-2x)'=-2$ なので $\dfrac{1}{-2}$ をかける

積分とその応用【置換積分法】

□置換積分法～積 ○×□△の形…○と□に関係性なし

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。x が t の関数として $x=g(t)$ と表されるとき，$y=F(x)$ は t の関数でもある。$g(t)$ が微分可能であるとき　合成関数の微分法（置き換えたものの微分を掛ける）

$$\frac{dy}{dx}=F'(x)=f(x),\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$

y を2通りの不定積分で表すと，次の **置換積分法** の公式が成り立つ。

置換積分法 (1)

1　$\displaystyle\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$　　ただし，$x=g(t)$

$\displaystyle\int f(x)dx=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt=\int f(g(t))g'(t)dt$と見ることもできる

$x=g(t)$ のとき $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ である。

$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ を**形式的に** $dx=g'(t)dt$ と書き表すと，　$\dfrac{dx}{dt}$ は1つの記号であるが、形式的（内容を問題気にしない）に分けて考えられるとする

上の公式1における式の変形が覚えやすい。

$$\int f(\boxed{x})\boxed{dx}=\int f(\boxed{g(t)})\boxed{g'(t)dt}$$

x を $g(t)$，dx を $g'(t)dt$ におき換える。

例題２）　不定積分 $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$ を求めよ。

解答　$\sqrt{2x-1}=t$ とおくと　$2x-1=t^2$　$2x=t^2+1$　$x=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{dx}{dt}=t$

$$\int\boxed{x}\boxed{\sqrt{2x-1}}\boxed{dx}=\int\boxed{\frac{1}{2}(t^2+1)}\cdot\boxed{t}\cdot\boxed{tdt}$$　$dx=tdt$

$\dfrac{1}{30}t^3$ でくくる

$$=\frac{1}{2}\int(t^4+t^2)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C$$

$t^3=t^2\cdot t$ に注意して x の式にもどす

$$=\frac{1}{30}(3t^2+5)t^3+C=\frac{1}{30}\{3(2x-1)+5\}(2x-1)\sqrt{2x-1}$$

$$=\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$$

問６）　解答　$2x-1=t$ とおくと　$2x=t+1$　$x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$$\int\boxed{x}\boxed{\sqrt{2x-1}}\boxed{dx}=\int\boxed{\frac{1}{2}(t+1)}\cdot\boxed{\sqrt{t}}\cdot\boxed{\frac{1}{2}dt}$$　$dx=\dfrac{1}{2}dt$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C$$　$\dfrac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}$ でくくる

$t^{\frac{3}{2}}=t^{\frac{2}{2}}\cdot t^{\frac{1}{2}}$ に注意して x の式にもどす

$$=\frac{1}{30}\left(3t^{\frac{2}{2}}+5\right)t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{30}\{3(2x-1)+5\}(2x-1)\sqrt{2x-1}$$

$$=\frac{1}{15}(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$$

積分とその応用【置換積分法】

□$f(g(x))g'(x)$ の置換積分法～積 ○×□△の形…○と□に関係性あり

前ページの置換積分法 (1) の公式において，左辺と右辺を入れかえて，積分変数 t，x をそれぞれ x，u に変えると，次の公式が得られる。

□を微分すると○になるとき（似た形も可）

置換積分法 (2)

2　$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$　　ただし，$g(x)=u$

$g(x)=u$ のとき $g'(x)=\dfrac{du}{dx}$ である。$g'(x)=\dfrac{du}{dx}$ を**形式的に** $g'(x)dx=du$ と書き表すと，上の公式 2 における式の変形が覚えやすい。

$\int f(\boxed{g(x)})\boxed{g'(x)dx}=\int f(\boxed{u})\boxed{du}$

$g(x)$ を u，$g'(x)dx$ を du におき換える。

例題３）　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$　　(2) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

$(x^2+1)'=2x$

$(\sin x)'=\cos x$

解答　(1)　$x^2+1=u$ とおき x で微分すると　$2x=\dfrac{du}{dx}$　　$\therefore 2xdx=du$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int \sqrt{x^2+1}\cdot 2xdx$$

$$=\int \sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}u^{\frac{2}{2}}\cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

(2)　$\sin x=u$ とおき x で微分すると　$\cos x=\dfrac{du}{dx}$　　$\therefore \cos x\,dx=du$

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int (\sin x)^2\cdot\cos x\,dx$$

$$=\int u^2du$$

$$=\frac{u^3}{3}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

積分とその応用【置換積分法】

□$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ の不定積分法～ $\dfrac{(\text{分母の微分})}{(\text{分母})}$ と見られるとき

公式２において，とくに $f(u)=\dfrac{1}{u}$ とすると

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\int \frac{1}{u}du=\log|u|+C=\log|g(x)|+C$$

となる。すなわち，次の公式が成り立つ。

3	$\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

例題４）　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ← $(x^2-3)'=2x$

解答　(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}dx=\int \frac{(x^2-3)'}{x^2-3}dx$

$$=\log|x^2-3|+C$$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

解答　(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ ← $(\cos x)'=-\sin x$

$$=\int \frac{-(-\sin x)}{\cos x}dx$$

$$=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=-\log|\cos x|+C$$

積分とその応用【部分積分法】

□部分積分法

積の導関数の公式　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$より，$f(x)g(x)$ は右辺の関数の原始関数である。

よって　$\int\{f(x)g(x)\}'dx=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$

$f(x)g(x)=\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx$

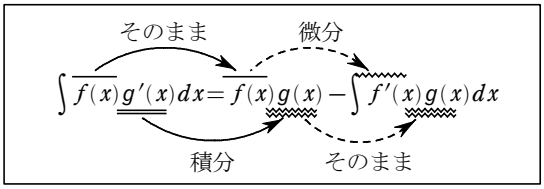
$f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx=\int f(x)g'(x)dx$

置換積分法により，次の **部分積分法** の公式が成り立つ。

部分積分法

4　$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

マイナス



ポイント

1．積分したい関数が「２つの関数の掛け算」である

2．片方の関数が微分すると簡単な関数になる

（もう片方は積分しても余り複雑にならない関数だと嬉しい）

例５）　不定積分 $\int xe^{2x}dx$ を求めよ。

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
	x	e^{2x}
微分	1	$2e^{2x}$

掛け算されている関数をそれぞれ微分・積分して表にする

解答　$\int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C$

$=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

シンプルな組合せの方に $\int$ を付ける

$2x$ が x だったらいいのにな

$\Rightarrow(2x)'=2$ より　$\times\frac{1}{2}$

積分とその応用【部分積分法】

□部分積分法（つづき）

ポイント

１．積分したい関数が「２つの関数の掛け算」である

２．片方の関数が微分すると簡単な関数になる

（もう片方は積分しても余り複雑にならない関数だと嬉しい）

例題５） 不定積分 $\int \log x\,dx$ を求めよ。

$\log x = 1\cdot\log x$ とみる

積分	x	?
	1	$\log x$
微分	0	$\frac{1}{x}$

掛け算されている関数をそれぞれ微分・積分して表にする

解答 $\int 1\cdot\log x\,dx = x\cdot\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$= x\log x - \int dx$

$= x\log x - x + C$

シンプルな組合せの方に $\int$ を付ける

例題６） 不定積分 $\int x^2e^x dx$ を求めよ。

積分	$\frac{1}{3}x^3$	e^x
	x^2	e^x
微分	$2x$	e^x

掛け算されている関数をそれぞれ微分・積分して表にする

解答 $\int x^2e^x dx = x^2\cdot e^x - \int 2x\cdot e^x dx$

$= x^2e^x - 2\boxed{\int x\cdot e^x dx}$

$= x^2e^x - 2\left(x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x dx\right) + C$

$= x^2e^x - 2(x\cdot e^x - e^x) + C$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

シンプルな組合せの方に $\int$ を付ける

$\int x\cdot e^x dx$ を部分積分

積分	$\frac{1}{2}x^2$	e^x
	x	e^x
微分	1	e^x

積分とその応用【いろいろな関数の不定積分】

□分数関数の不定積分

① 分母が単項式 $\Longrightarrow$ 分数式は整式にして単項式ごとにみる（以前のプリント）

② $\dfrac{分母の微分}{分母}$ $\Longrightarrow$ 置換積分法で $\log|分母|$ （以前のプリント）

③ 分母が多項式で（分母の次数）＜（分子の次数）$\Longrightarrow$ $A=B\times Q+R$

④ 分母が因数分解可能 $\Longrightarrow$ 部分分数分解

例題７） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}dx$

解答 (1) $\dfrac{x^2+3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)+4}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\dfrac{4}{x+1}=x-1+\dfrac{4}{x+1}$

$$
\begin{array}{r}
x\ \ -1 \\
x+1\,\overline{)\,x^2 \qquad +3} \\
\underline{x^2+\ x} \\
-x+3 \\
\underline{-x-1} \\
4
\end{array}
$$

または

$$
\begin{array}{r|rrr}
-1 & 1 & 0 & 3 \\
 & & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{4}
\end{array}
$$

であるから

$\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x+1}dx=\int\left(x-1+\boxed{\frac{4}{x+1}}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-x+4\log|x+1|+C$

$x+1$ が x だったらいいのにな

$\Rightarrow (x+1)'=1$ より $\times\dfrac{1}{1}$

(2) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$ であるから

分子が１なら差を取ってでＯＫ

$\dfrac{1}{大-小}\left(\dfrac{1}{小}-\dfrac{1}{大}\right)$

$\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ とおくと

両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて　$x-3=(x-2)a+(x-1)b$

x について整理すると　　$x-3=(a+b)x-2a-b$

x の恒等式なので　$a+b=1$，$-2a-b=-3$

$$
\begin{array}{rrl}
 & a+b= & 1 \\
+) & -2a-b= & -3 \\
\hline
 & -a\quad = & -2
\end{array}
$$

これを解くと　$a=2$，$b=-1$

よって　$\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$=2\log|x-1|-\log|x-2|+C$

$=\log|x-1|^2-\log|x-2|+C$

$=\log\dfrac{(x-1)^2}{|x-2|}+C$

$x-1$，$x-2$ がそれぞれ x だったらいいのにな

$|x-1|^2=(x-1)^2$

$\log M-\log N=\log\dfrac{M}{N}$

積分とその応用【いろいろな関数の不定積分】

□三角関数に関する不定積分

三角関数に関する積分では，半角の公式や倍角の公式がよく使われる。

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\ ,$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\ ,$$

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

また，三角関数の積を和や差の形にするとき，積和の公式が使われる。

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

例題８） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^2 x\,dx$　　(2) $\int \sin 4x\cos 2x\,dx$

解答 (1) $\int \sin^2 x\,dx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$ と分けても良い

(2) $\int \sin 4x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 6x+\sin 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$$

$$=-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$4x$，$2x$ がそれぞれ x だったらいいのにな

$\sin 4x\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\{\sin(4x+2x)+\sin(4x-2x)\}$

$=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)$

積分とその応用【いろいろな関数の不定積分】

例題９）　不定積分 $\int \sin^3 x\,dx$ を求めよ。

○相互関係→置換積分法

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx$$

$\cos x = u$ とおくと　$-\sin x = \dfrac{du}{dx}$

$$\therefore \quad \sin x\,dx = (-1)du$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x - \int u^2 \cdot (-1)du$$
$$= -\cos x + \int u^2 du$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}u^3 + C$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$ より

$$\frac{1}{12}(4\cos^3 x - 3\cos x) - \frac{3}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{3}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

◎困ったら次数を下げて
倍角の関係性にもっていくと良い

◎ $(\sin x)^k \cos x$ や $(\cos x)^k \sin x$ なら
置換積分の形

○半角の公式→積和

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot \sin x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x \cos 2x\,dx$$

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}\{\sin 3x + \sin(-x)\}$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \text{ なので}$$

$$\int \sin^3 x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\int (\sin 3x - \sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x + C$$
$$= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C$$

○３倍角

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ なので

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int \sin x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\,dx$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos 3x + C$$
$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

積分とその応用【いろいろな関数の不定積分】

例題１０）　不定積分 $\int \frac{dx}{\cos x}$ を求めよ。

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

ここで　$\sin x=u$ とおくと　$\cos x=\frac{du}{dx}$ となるから　$\cos x\,dx=du$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x}&=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx\\
&=\int \frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx\\
&=\int \frac{1}{1-u^2}du\\
&=\int \frac{-1}{u^2-1}du\\
&=-\int \frac{1}{(u+1)(u-1)}du\\
&=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\
&=-\frac{1}{2}(\log|u-1|-\log|u+1|)+C\\
&=\frac{1}{2}(-\log|u-1|+\log|u+1|)+C\\
&=\frac{1}{2}(\log|u+1|-\log|u-1|)+C\\
&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+C\\
&=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{|\sin x+1|}{|\sin x-1|}+C\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{\sin x+1}{-(\sin x-1)}+C\\
&=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C
\end{aligned}$$

分子が１なら差を取ってでＯＫ

$$\frac{1}{\text{大ー小}}\left(\frac{1}{\text{小}}-\frac{1}{\text{大}}\right)$$

$$\frac{1}{(u+1)-(u-1)}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)$$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より

$0\leqq\sin x+1\leqq 2$　（中身正）

$-1\leqq\sin x-1\leqq 0$　（中身負）

積分とその応用【定積分】

□定積分

数学Ⅱで学んだように，関数 $f(x)$ の 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，次のように定義される。a をこの定積分の **下端**，b を **上端** という。

定積分

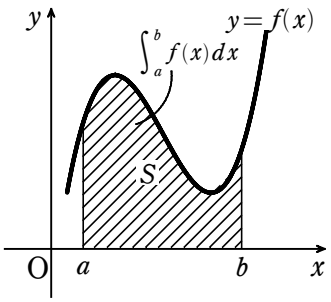
ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とし，

a，b をその区間に含まれる任意の値とするとき

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

上－下

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$ を ***a* から *b* まで積分する** という。区間 $[a,\ b]$ で常に $f(x)\geqq 0$ のとき，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を表す。



例１） (1) $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_1^3$$

$$=\frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$$

数Ⅱの定積分と同様

不定積分を［ ］で囲う

（積分定数 C は不要）

(2) $\int_0^{\pi} 6\sin 3\theta\,d\theta=\Big[6\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\cos 3\theta)\Big]_0^{\pi}$

3θ がθだったらいいのにな

$$=-2\Big[\cos 3\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$=-2(\cos 3\pi-\cos 0)$$

$$=-2(-1-1)$$

$$=-2\cdot(-2)$$

$$=4$$

積分とその応用【定積分】

□定積分の基本性質

数学Ⅱで学んだように，定積分について，次のことが成り立つ。

定積分の性質

1　$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　　ただし，k は定数

2 & 3　$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

上端下端ひっくり返すと符号も変わる

4　$\int_a^a f(x)\,dx = 0$　線分の面積は０

5　$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

6　$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

被積分関数が変わらなければつなげたり、ばらしたりしてもＯＫ

例）次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_1^2 \frac{3x-2}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$　分母が単項なので分割する

$= 3\int_1^2 \frac{dx}{x} - 2\int_1^2 x^{-2}\,dx$

$= 3\left[\log|x|\right]_1^2 - 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$= 3(\log 2 - \log 1) - 2\left\{\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1)\right\}$　符号注意

$= 3(\log 2 - 0) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 3\log 2 - 1$

(2)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x)\right\}dx$　積和の公式（加法定理から作る）

$= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\pi - \frac{1}{5}\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2} + \sin 0\right\}$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot 0 - 1 + 0\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{5}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$

(3)　$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\left[x\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\pi - 0 + \frac{1}{2}\sin 2\pi - \frac{1}{2}\sin 0\right)$

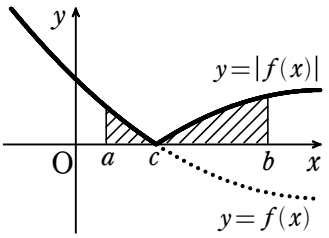
$= \frac{1}{2}(\pi - 0 + 0 - 0) = \frac{\pi}{2}$

積分とその応用【定積分】

□絶対値のついた関数の定積分

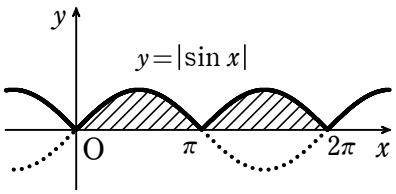
関数 $f(x)$ が　$a \leqq x \leqq c$ のとき　$f(x) \geqq 0$，　$c \leqq x \leqq b$ のとき　$f(x) \leqq 0$　であるとする。このとき，絶対値のついた関数 $|f(x)|$ を a から b まで積分するには，次のように区間を分けて行う。

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b \{-f(x)\}dx$$



この定積分 $\int_a^b |f(x)|dx$ は，$y=|f(x)|$ のグラフと x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた2つの部分の面積の和を表している。

例題）　定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin x|dx$ を求めよ。



解答　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

よって

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= (1+1)+(1+1) = 4$$

グラフの周期性により

$$2\int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$= 2(1+1)$$

$$= 4$$

と見ることもできる

例題）　定積分 $\int_{-1}^{2} |e^x - 1|dx$ を求めよ。

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき　$|e^x - 1| = 1 - e^x$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|e^x - 1| = e^x - 1$

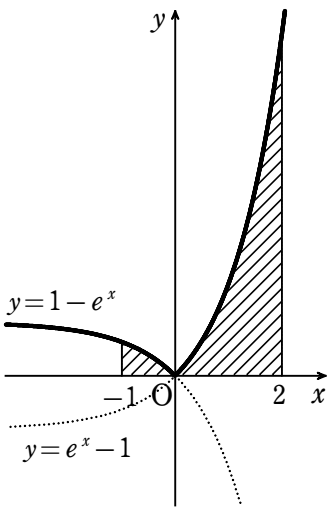
であるから

$$\int_{-1}^{2} |e^x - 1|dx = \int_{-1}^{0} (1-e^x)dx + \int_0^2 (e^x - 1)dx$$

$$= \Big[x - e^x\Big]_{-1}^{0} + \Big[e^x - x\Big]_0^2$$

$$= \left\{-1 - \left(-1 - \frac{1}{e}\right)\right\} + (e^2 - 2 - 1)$$

$$= e^2 + \frac{1}{e} - 3$$



積分とその応用【定積分の置換積分法】

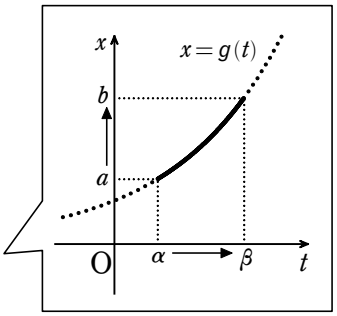
□定積分の置換積分法

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。

x が微分可能な関数 $g(t)$ を用いて，$x=g(t)$ と表されるとき

$$\frac{d}{dt}F(g(t))=f(g(t))g'(t)$$

$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ とする。図のような x と t の関係を，右の表のように表す。このとき



x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt=\Big[F(g(t))\Big]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))$$
$$=F(b)-F(a)$$
$$=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

となる。よって，次の公式が成り立つ。

定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)\,dt$$

x	$a \longrightarrow b$
t	$\alpha \longrightarrow \beta$

例） 定積分 $\int_{1}^{2} x(2-x)^4\,dx$ を求める。

$2-x=t$ とおくと

$x=2-t$

$\dfrac{dx}{dt}=-1$ より $dx=(-1)dt$

$t=2-x$ に
$x=1$ を代入すると $t=1$
$x=2$ を代入すると $t=0$

また、x と t の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$1 \longrightarrow 0$

よって

$$\int_{1}^{2} x(2-x)^4\,dx=\int_{1}^{0}(2-t)\cdot t^4\cdot(-1)\,dt$$

文字と同時に
範囲（上端・下端）も変える

$$=\int_{1}^{0}(-2t^4+t^5)\,dt$$
$$=\int_{0}^{1}(2t^4-t^5)\,dt$$

上端・下端の交換
⇒被積分関数の符号を変える

$$=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{t^6}{6}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{7}{30}$$ 終

積分とその応用【定積分の置換積分法】

例題２）　a は正の定数とする。定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ。

解答　**$x=a\sin\theta$ とおく**と　$\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$

$dx=a\cos\theta\,d\theta$

$\sqrt{a^2-x^2}$ のときは
$x=a\sin\theta$ とおくのは鉄則

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

$x=0$ のとき
$0=a\sin\theta$
$\sin\theta=0$ なので $\theta=0$
$x=a$ のとき
$a=a\sin\theta$
$\sin\theta=1$ なので $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

この範囲において $\cos\theta \geqq 0$ である。

また，$a>0$ であるから

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2}&=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\\&=\sqrt{a^2\cos^2\theta}\\&=|a\cos\theta|\\&=a\cos\theta\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)a\cos\theta\,d\theta$$

変数はθなので a は外へ

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

次数下げ

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

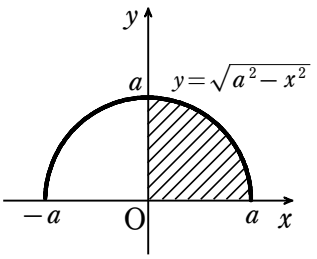
$$=\frac{1}{4}\pi a^2$$

補足　例題 の定積分において，被積分関数

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

のグラフは，右の図のような半円周を表し，

定積分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の四分円の面積を表す。



よって

$S=\dfrac{1}{4}\times\pi\times a^2$

円の面積の公式

$=\dfrac{1}{4}\pi a^2$

積分とその応用【定積分の置換積分法】

例題３）　定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。

考え方　**$x=\tan\theta$ とおいて**，$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ を利用する。

解答　**$x=\tan\theta$ とおく**と　$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$　　$\therefore\ dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

区間 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ において，

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

よって
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$
$$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$

注意　被積分関数が $\frac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ のときは，$x=a\tan\theta$ とおくとよい。

積分とその応用【定積分の置換積分法】

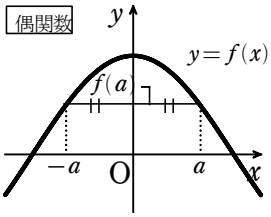
□偶関数，奇関数と定積分

関数 $f(x)$ において，　$f(-x)=f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を **偶関数** といい，

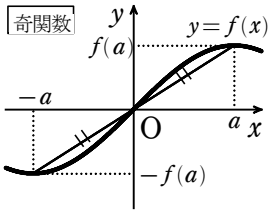
$f(-x)=-f(x)$ が常に成り立つとき，この関数を **奇関数** という*。

たとえば，**x^2，$\cos x$ は偶関数であり，x，$\sin x$ は偶関数**である。

偶関数



奇関数



＊ 偶関数のグラフは
y 軸に関して対称
奇関数のグラフは
原点に関して対称

関数 $f(x)$ が偶関数または奇関数のとき，次のことが成り立つ。

偶関数，奇関数と定積分

1　偶関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

2　奇関数 $f(x)$ について　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$

半分だけ計算して２倍
（下端が０になるので
計算も楽）

上下で打ち消しあう

【証明】関数 $f(x)$ の定積分について，常に次の等式が成り立つ。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ において $x=-t$ とおくと　$dx=(-1)dt$

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

x と t の対応は右のようになる。

よって　$\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

したがって，① から　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a}\{f(-x)+f(x)\}dx$

右辺において，

$f(x)$ が偶関数ならば，$f(-x)=f(x)$ から　$f(-x)+f(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

また，奇関数ならば，$f(-x)=-f(x)$ から　$f(-x)+f(x)=-f(x)+f(x)=0$

したがって，１，２が成り立つ。　終

例）　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-6x^2+5x+1)dx=2\int_{0}^{1}(-6x^2+1)dx$

x^3，$5x$ は奇関数，
$-6x^2$，１は偶関数

$$=2\left[-2x^3+x\right]_0^1=-2$$

例）　(1)　$f(x)=\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

(2)　$f(x)=\sin x$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$

積分とその応用【定積分の部分積分法】

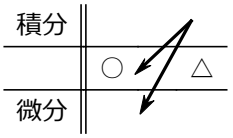
□定積分の部分積分法

不定積分の部分積分法の公式から，次の公式が得られる。

定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

基本は不定積分同様表の活用



前半は $\Big[\ \Big]_{下}^{上}$ 後半は $\int_{下}^{上}$

例題） 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$　　(2) $\int_0^1 xe^x dx$　　(3) $\int_1^2 x\log x\,dx$

解答

(1) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	$-\cos x$
	x	$\sin x$
微分	1	$\cos x$

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot(-\cos x)dx$$
$$=-\pi\cos\pi+0+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi+\sin\pi-\sin 0$$
$$=\pi$$

(2) $\int_0^1 xe^x dx$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	e^x
	x	e^x
微分	1	e^x

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x dx$$
$$=e-\int_0^1 e^x dx$$
$$=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$
$$=e-(e^1-e^0)$$
$$=1$$

(3) $\int_1^2 x\log x\,dx=\Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$

積分	$\frac{1}{2}x^2$	?
	x	$\log x$
微分	1	$\frac{1}{x}$

$$=2\log 2-\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}\int_1^2 x dx$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^2$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\Big(2-\frac{1}{2}\Big)$$
$$=2\log 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=2\log 2-\frac{3}{4}$$

積分とその応用【定積分で表された関数】

□定積分と導関数

a を定数とするとき，$F'(t)=f(t)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$$

$F(x)$ は x の関数
$F(x)$ は定数扱い

この両辺の関数を x で微分すると，次の公式が得られる。

定積分と導関数

a が定数のとき　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

$F(x)$ は定数扱いなので
微分すると 0 になる

$\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ だと

$\Big[F(t)\Big]_x^1=F(1)-F(x)$

となるので、あらかじめ
上下を変えて符号を変えておく

問１１改）　次の関数を x で微分せよ。ただし，a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_a^x \sin\theta\,d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t}dt$

解答

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \sin\theta\,d\theta=\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{t^3}{1+e^t}dt=-\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{t^3}{1+e^t}dt$$

$$=-\frac{x^3}{1+e^x}$$

応用例題）

関数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x (x-t)\cos 3t\,dt$ の $F''(x)$ を求めよ。

ヒント　右辺の積分の計算では，積分変数でない x は定数として扱う。

解答　$F(x)=\displaystyle\int_a^x x\cos 3t\,dt-\int_a^x t\cos 3t\,dt$

$=x\displaystyle\int_a^x \cos 3t\,dt-\int_a^x t\cos 3t\,dt$　であるから

$F'(x)=(x)'\displaystyle\int_a^x \cos 3t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_a^x \cos 3t\,dt\right)-\frac{d}{dx}\int_a^x t\cos 3t\,dt$

$=\displaystyle\int_a^x \cos 3t\,dt+x\cos 3x-x\cos 3x$

$=\displaystyle\int_a^x \cos 3t\,dt$

よって　$F'(x)=\displaystyle\int_a^x \cos 3t\,dt$ であるから，

両辺を x で微分すると

$$F''(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x \cos 3t\,dt$$

$$=\cos 3x$$

積の微分法
微分そのまま、そのまま微分

【何を求めるのかをよく考えよう】

$F'(x)=\displaystyle\int_a^x \cos 3t\,dt=\left[\frac{1}{3}\sin 3t\right]_a^x$

$=\dfrac{1}{3}\sin 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3a$

x で微分すると

$F''(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 3\cos 3x-0=\cos 3x$

この流れは $F'(x)$ が聞かれていないのなら
積分→微分と無駄が多いこととなる

積分とその応用【定積分で表された関数】

応用例題６） 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$$

上端下端とも数値であるので
計算結果は定数となる

解答

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=a \quad \cdots\cdots ①$$

数Ⅱのときと同様
定数となる部分を
文字で置き換える

とおくと，与えられた等式から

$$f(x)=\sin x+3a \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

②において $x=t$ とすると

$$f(t)=\sin t+3a$$

①に当てはめて積分すると

$2\sin t\cos t=\sin 2t$ より
$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t+3a)\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt+3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+3a\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos\pi-\cos 0)+3a\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(-1-1)+3a(1-0)$$

$$=3a+\frac{1}{2}$$

ゆえに，①より $3a+\frac{1}{2}=a$ から　$2a=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \quad a=-\frac{1}{4}$$

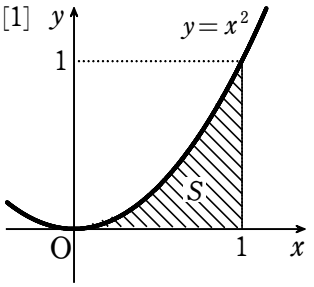
これを ② に代入して　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

積分とその応用【定積分と区分求積法】

□定積分と区分求積法

関数 $f(x)=x^2$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積 S を考えてみよう。

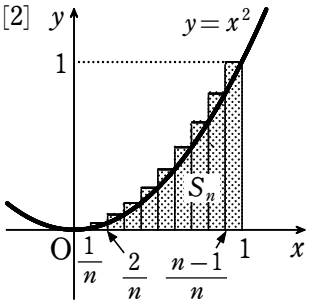
[1]



定積分を用いて S を求めると　$S=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

一方，図 [2] のように区間 [0，1] を n 等分して n 個の長方形を作り，それらの面積の和を S_n とする。$n\longrightarrow\infty$ のとき，この長方形の集まりは図 [1] の斜線で示した図形に限りなく近づくから，$S_n\longrightarrow S$ と予想される。 実際に計算してみよう。

[2]



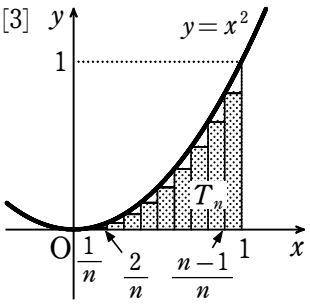
$$S_n=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

であるから　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$

よって，$\lim_{n\to\infty}S_n=S$ が成り立つことが計算で確かめられた。

上の S_n の代わりに，右の図 [3] の長方形の面積の和 T_n を考えても，

[3]



$$T_n=\frac{1}{n}\left\{0+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$

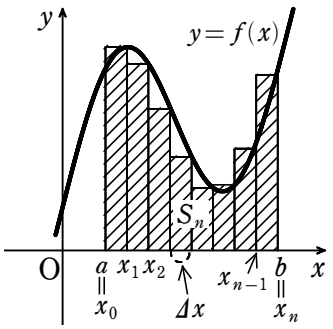
よって　$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}=S$

このように，区間を細分し，和の極限値として面積や体積を求める方法を一般に **区分求積法** という。

積分とその応用【定積分と区分求積法】

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，常に $f(x)\geqq 0$ のとき，区間 $[a,\ b]$ を n 等分して，その分点の座標を，a に近い方から順に　$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}$　とし，次のようにおく。

$$a=x_0,\ b=x_n,\ \frac{b-a}{n}=\Delta x$$



このとき，右の図の斜線部分の面積　S_n は

$$S_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

であり，$n\longrightarrow\infty$ のとき $S_n\longrightarrow S$ と考えられる。

一般に，常に $f(x)\geqq 0$ と仮定しなくても，次のことが成り立つ。

区分求積法と定積分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx$$

ただし，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\Delta x$　　$\leftarrow \Delta x=\dfrac{1}{n}$，$x_k=\dfrac{k}{n}$

とくに $a=0$，$b=1$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

例題）次の極限値を求めよ。　$S=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

方針　$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ の形を作るために，①　$\dfrac{1}{n}$ をくくり出す。

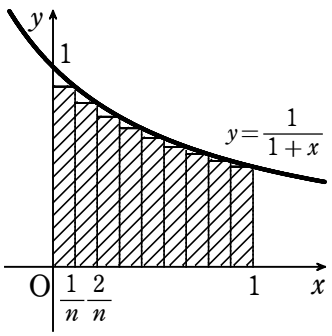
②　$x=\dfrac{k}{n}$ となるところを探す。（$k=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots,\ n$）

解答

$$S=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\boxed{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\boxed{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{1+\boxed{\frac{3}{n}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\boxed{\frac{n}{n}}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\boxed{\frac{k}{n}}}\right)$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+\boxed{x}}$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1$$
$$=\log 2-\log 1\ =\log 2$$

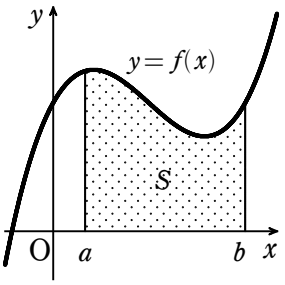


積分とその応用【定積分と不等式】

□定積分と不等式

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であり，かつ $f(x)\geqq 0$ であるとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S について考える。

$[a,\ b]$ で常に $f(x)=0$ ならば $S=0$，$[a,\ b]$ で $f(x)>0$ となる x があるならば $S>0$ である。よって，次のことが成り立つ。



区間 $[a,\ b]$ でつねに $f(x)\geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqq 0$

等号は，常に $f(x)=0$ のときに成り立つ。

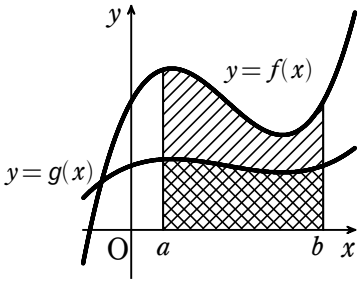
さらに次のことが成り立つ。

定積分と不等式

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$f(x)\geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$

等号は，常に $f(x)=g(x)$ のときに成り立つ。



問１５） $x\geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{(x+1)^2}\leqq\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqq\dfrac{1}{x+1}$ であることを示し，

これを用いて不等式 $\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\log 2$ を証明せよ。

解答

x の分大きい　　x^2 の分大きい

$x\geqq 0$ であるから　$x^2+2x+1\geqq x^2+x+1\geqq x+1$

すなわち　$(x+1)^2\geqq x^2+x+1\geqq x+1$

各辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{(x+1)^2}\leqq\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqq\dfrac{1}{x+1}$

各項が正なので逆数にすると大小反転

が成り立つ。しかも，$0<x<1$ で等号は成り立たない。

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}<\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\int_0^1\frac{dx}{x+1}$

$\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\Big[\log(x+1)\Big]_0^1$

つねに大小関係が成り立つので $\displaystyle\int_0^1 dx$ をつけても大小関係は変わらない

ここで $\left[-\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1=-\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{1}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\int_0^1(x+1)^{-2}dx=\Big[-1\cdot(x+1)-1\Big]$

$\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\log 2-\log 1=\log 2$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}<\log 2$

積分とその応用【定積分と不等式】

例題８） 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の定積分を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\log(n+1)$$ ただし，n は自然数

考え方　自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ では $f(x)\geqq f(k+1)$ である。

常には $f(x)=f(k+1)$ でないから，$\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx>\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx$ が成り立つ。

証明　自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$

では　$\dfrac{1}{k}\geqq\dfrac{1}{x}$

また，$k<x<k+1$ で

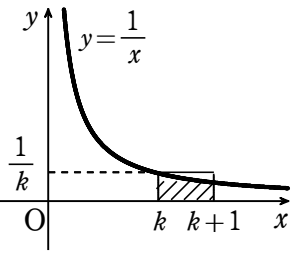
常には $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{k}$ でないから

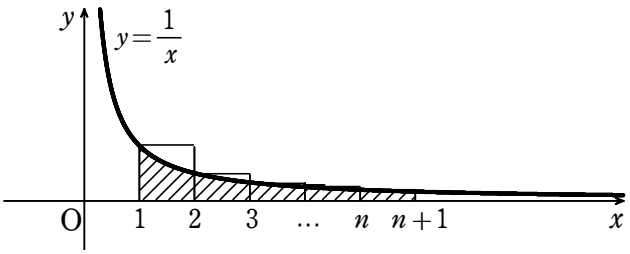
$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx>\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$$

すなわち

$$\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$$

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx=\frac{1}{k}\int_k^{k+1}dx$$
$$=\frac{1}{k}\Big[x\Big]_k^{k+1}$$
$$=\frac{1}{k}(k+1-k)$$
$$=\frac{1}{k}$$





$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ として，

辺々を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_2^3\frac{dx}{x}+\int_3^4\frac{dx}{x}+\cdots\cdots+\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$$

ここで右辺は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$

$$=\Big[\log|x|\Big]_1^{n+1}$$
$$=\log(n+1)-\log 1 \qquad \leftarrow \log 1=0$$
$$=\log(n+1)$$

よって　$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)$　　終

積分とその応用【面積】

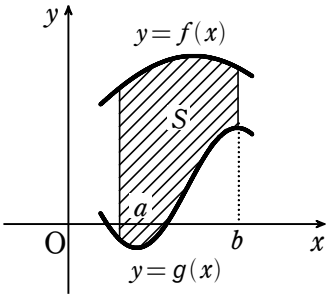
□面積

２曲線間の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，２つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

数Ⅱと同じく，上－下

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



例題）　曲線 $y=e^x-e$ と x 軸，y 軸および直線 $x=2$ で囲まれた２つの部分の面積の和 S を求めよ。

まずは交点

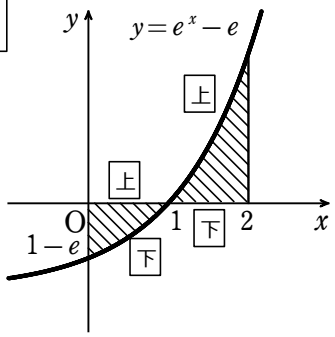
解答　この曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

方程式　$e^x-e=0$　を解いて　　$x=1$

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では，常に $y \leqq 0$，

区間 $1 \leqq x \leqq 2$ では，常に $y \geqq 0$

であるから，求める面積の和 S は



$$S=\int_0^1 \{-(e^x-e)\}dx+\int_1^2 (e^x-e)dx$$

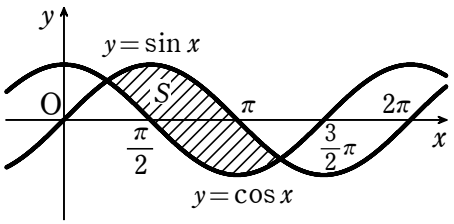
$$=-\left[e^x-ex\right]_0^1+\left[e^x-ex\right]_1^2$$

$$=-\{(e-e)-(e^0-0)\}+\{(e^2-2e)-(e-e)\}=1+e^2-2e=e^2-2e+1$$

例題）　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，

２つの曲線　$y=\sin x$，$y=\cos x$

で囲まれた右の図の斜線部分の面積 S を求めよ。

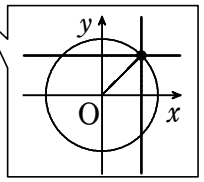


解答　２つの曲線の共有点の x 座標は，

方程式 $\sin x=\cos x$ の解である。

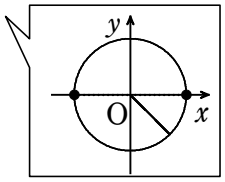
$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解くと

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{であるから}$$



$$-\frac{\pi}{4} \leqq x-\frac{\pi}{4} \leqq 2\pi-\frac{\pi}{4} \quad \text{より} \quad x-\frac{\pi}{4}=0,\ \pi \quad \therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ では，$\sin x \geqq \cos x$ であるから



$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=\left(-\cos\frac{5}{4}\pi-\sin\frac{5}{4}\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

積分とその応用【面積】

□曲線 $x=g(y)$ と面積

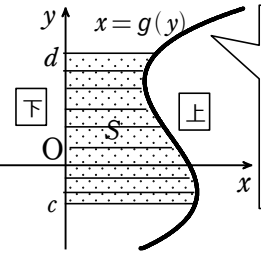
y の関数 $x=g(y)$ で表される曲線については，次のことが成り立つ。

区間 $c \leqq y \leqq d$ で常に $g(y) \geqq 0$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_c^d g(y)\,dy$$

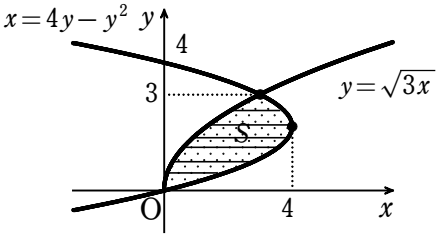
$x=$（y の式）の形であることに注意

⇒範囲や dy



x，y の位置を入れ替える（裏から透かす）と「上ー下」がわかりやすいときの話

例題２）　曲線 $x=4y-y^2$ と曲線 $y=\sqrt{3x}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



解答　曲線 $y=\sqrt{3x}$　（$x \geqq 0$，$y \geqq 0$）

すなわち　$y^2=3x$　$\therefore\ x=\dfrac{1}{3}y^2$ と

曲線 $x=4y-y^2$ の交点の y 座標は

$\dfrac{1}{3}y^2=4y-y^2$ の解である

両辺を３倍して　$y^2=12y-3y^2$

$4y^2-12y=0$

4で割ると　$y^2-3y=0$　$\therefore$　$y(y-3)=0$

よって　交点の y 座標は　$y=0,\ 3$

区間 $0 \leqq y \leqq 3$ で

$4y-y^2 \geqq \dfrac{1}{3}y^2$

であるから，求める面積 S は

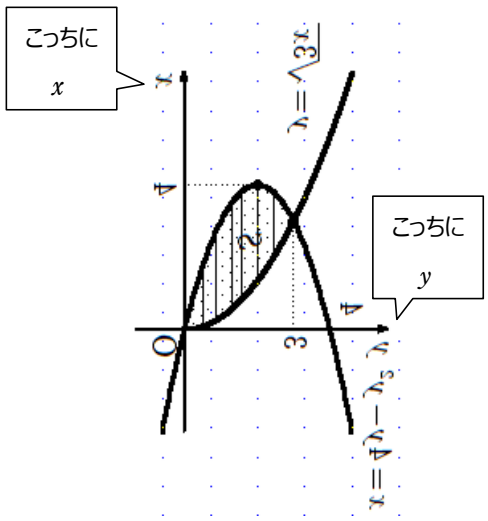
$$S=\int_0^3 \left\{(4y-y^2)-\frac{1}{3}y^2\right\}dy$$

$$=\int_0^3 \left(4y-\frac{4}{3}y^2\right)dy$$

$$=\left[2y^2-\frac{4}{9}y^3\right]_0^3$$

$$=18-12$$

$$=6$$



積分とその応用【面積】

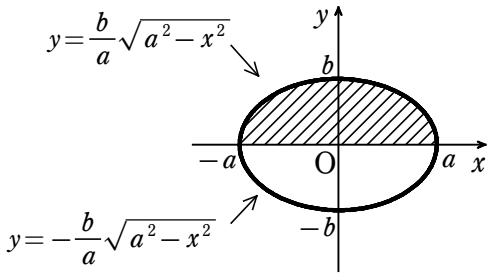
□いろいろな式で表される曲線と面積

応用例題３） $a>0$，$b>0$ とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ

方針　この楕円は x 軸に関して対称である。$y \geqq 0$ のとき，方程式を y について解き，
$y \geqq 0$ の部分の面積を 2 倍すればよい。

ちなみに「上ー下」をやっても
２倍となるので結果は同じ

解答　求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積を 2 倍したものに等しい。



方程式を y について解くと

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$y \geqq 0$ のとき，　$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

よって

$$S=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x=a\sin\theta$ と
置くことも考えられるが
楽な方法で

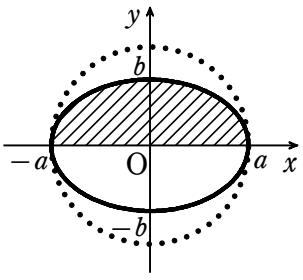
ここで，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は，半径 a の円の面積の半分である。

したがって　$S=\dfrac{2b}{a}\cdot\dfrac{1}{2}\pi a^2=\pi ab$

公式　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形の面積 S は，$S=\pi ab$ である

別解

楕円は円を圧縮（右図であれば縦方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍）したものであるから



$$S=\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$$

となる

積分とその応用【面積】

応用例題４）

$a>0$ とする。$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，サイクロイド

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

方針　曲線と x 軸の共有点の x 座標は，

$x=0$，$2\pi a$ であるから，

$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$ である。

これを置換積分法によって求める。

$y=0$ と $y=a(1-\cos\theta)$ より

$a(1-\cos\theta)=0$

$a \neq 0$ なので

$\cos\theta = 1$

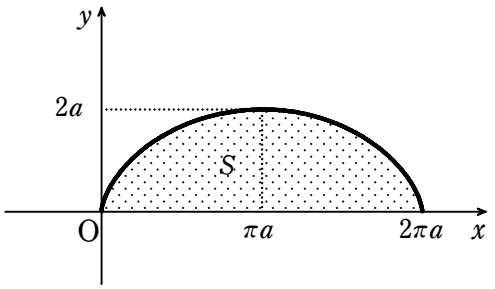
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において

$\theta = 0,\ 2\pi$

このとき

$x = a(0-\sin 0) = 0$

$x = a(2\pi - \sin 2\pi) = 2\pi a$



解答　求める面積は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

また，$x = a(\theta - \sin\theta)$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\ dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2\pi a$
θ	$0 \longrightarrow 2\pi$

よって，置換積分法により

$x=0$ のとき

$a(\theta - \sin\theta) = 0$

$a \neq 0$ より

$\sin\theta = \theta$

$\therefore \theta = 0$

$x = 2\pi a$ のとき

$a(\theta - \sin\theta) = 2\pi a$

$a \neq 0$ より

$\theta - \sin\theta = 2\pi$

$\therefore\ \theta = 2\pi$

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= a^2\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= a^2\{(3\pi - 0 + 0) - (0 - 0 + 0)\}$$

$$= 3\pi a^2$$

$\sin 0 = \sin 2\pi = 0$ なので

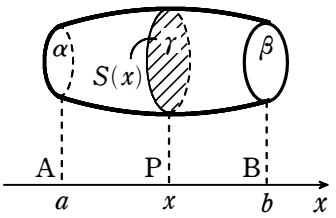
計算を略する

積分とその応用【体積】

□体 積

立体図形の体積についても，区分求積法の考えを利用して定積分で表すことができる。

右の図のように，立体が x 軸に垂直な 2 平面 α，β に挟まれているとする。この挟まれた部分の体積を V とし，2 平面 α，β と x 軸との交点 A，B の座標を，それぞれ a，b とする。ただし，$a<b$ である。



このとき，座標が x である点 P を通り，x 軸に垂直な平面 γ で立体を切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，体積 V は次の式で与えられる。

> 断面積 $S(x)$ と立体の体積 V
>
> $$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

【解説】区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分して，

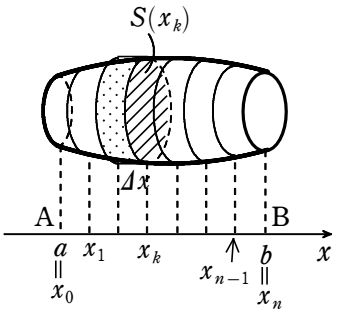
その分点の座標を，a に近い方から順に

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}$$

とし，次のようにおく。

$$a=x_0,\ b=x_n,\ \frac{b-a}{n}=\Delta x$$

そして，各分点を通り，x 軸に垂直な平面でこの立体を分割する。このとき



$$V_n=S(x_1)\Delta x+S(x_2)\Delta x+\cdots\cdots+S(x_n)\Delta x$$

$$=\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x$$

細分化された円柱の和

とすると，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$V_n \longrightarrow V$ と考えられる。

細分化された円柱の厚さを薄くしていく⇒なめらかになっていく

底面が通過した部分が体積

⇩

底面を a から b まで積み重ねたものが体積

よって，「区分求積法と定積分」の関係から

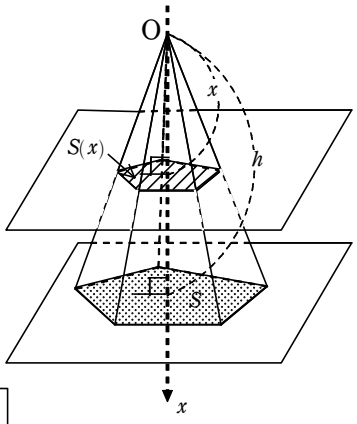
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x=\int_a^b S(x)\,dx$$ 終

積分とその応用【体積】

例題 14　底面積が S，高さが h の角錐の体積 V を，積分を用いて求めよ。

注意 図は五角形で書いているが，特に指定があるわけではない（多角形なら何でも良い）

解答　この直円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，
これを x 軸とし，頂点を原点 O にとる。
（下の図のように見た方がわかりこともある）



x 軸上の座標が x である点を通り，x 軸に垂直な平面で角錐を切ったときの断面積を $S(x)$ とする。
この断面は底面の多角形と相似である。

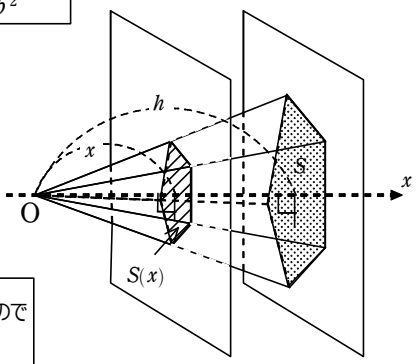
高さの比が x：h であるから相似比も x：h
断面と底面の相似比は x：h であるから，
面積比は

$$S(x) : S = x^2 : h^2$$

相似比が a：b ならば 面積比は a^2：b^2

$$x^2 \cdot S = h^2 \cdot S(x)$$

よって　$S(x) = \dfrac{S}{h^2}x^2$　← $S(x)$ は x の関数



したがって

$$V = \int_0^h S(x)\,dx$$

$$= \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2 dx$$

$\dfrac{S}{h^2}$ は x の無関係なので外に出す

$$= \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2 dx$$

$$= \frac{S}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}Sh$$

底面が通過した部分が体積
⇩
底面を a から b まで積み重ねたものが体積
⇩
底面は（一定の）変形をしていてもＯＫ

→問７へ…ではあるが
問７は底面が半径 r の円となる訳であるから $S = \pi r^2$
よって　$S(x) : S = x^2 : h^2$ より $S(x) = \dfrac{S}{h^2}x^2 = \dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$
これを 0 から h まで積分すればよい。
（$V = \dfrac{1}{3}Sh$ に $S = \pi r^2$ を代入しても結果は同じ）

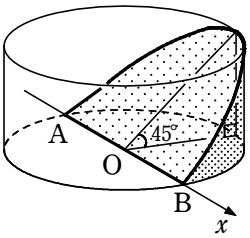
積分とその応用【体積】

応用例題６） 底面の半径が 3 である直円柱がある。

この底面の直径 AB を含み底面と 45° の傾きを

なす平面で直円柱を切り取った。

この切り取られた立体の体積 V を求めよ。



解答

底面の円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとする。

線分 AB 上の点 P を通り，x 軸に垂直な平面で立体を

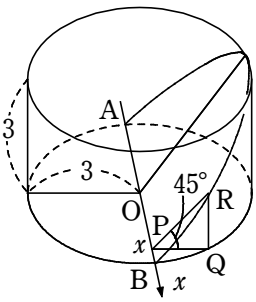
切ったときの断面を右の図のように △PQR とし，

P の座標を x とすると　$\mathrm{PO}=x$

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sqrt{a^2-x^2}$$

よって，△PQR の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)$$



したがって

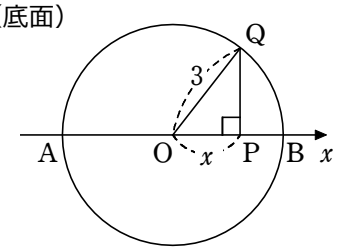
$$V=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\int_{0}^{a}(a^2-x^2)dx$$

$$=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$

（底面）



→問８へ

ヒント 円の中心 O を原点に，直線 AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とし，

二等辺三角形の面積を x の式で表す。

△OMQで三平方の定理により

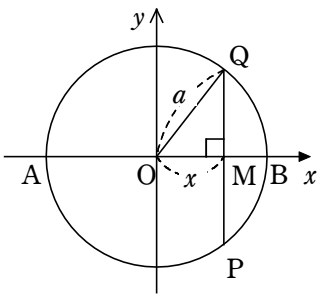
$$a^2=x^2+\mathrm{MQ}^2$$

$\mathrm{MQ}>0$ なので

$$\mathrm{MQ}=\sqrt{a^2-x^2}$$

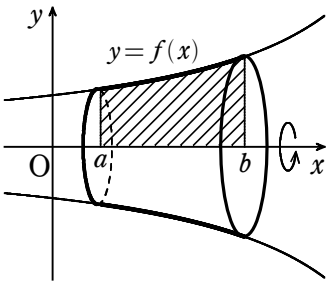
これを用いて△PQRの面積を表そう

（底面）



積分とその応用【体積】

□x 軸の周りの回転体の体積



右の図のように，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう。

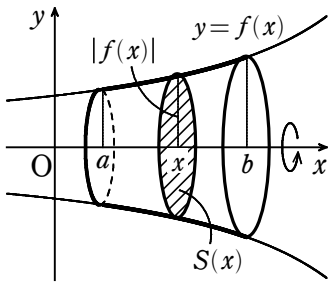
断面積 $S(x)$ と立体の体積 Vは

$$V=\int_a^b S(x)\,dx \qquad \text{ただし，} a<b$$

である。回転体の場合，点 $(x,\ 0)$ を通り，x 軸に垂直な平面でこの回転体を切ると，断面は半径が $|f(x)|$ の円である。その断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\pi|f(x)|^2=\pi\{f(x)\}^2$$

であるから，次の公式が成り立つ。



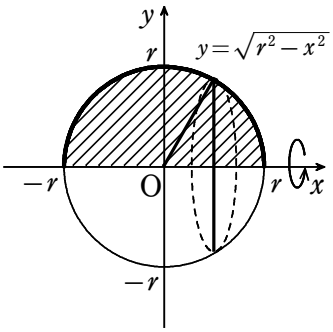
x 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx$$

ただし，$a<b$

$f(x)$ や y は回転体の外周になる線

例題 15　半径 r の球の体積 V を積分を用いて求めよ。



解答　半径 r の球は，区間 $-r\leqq x\leqq r$ において

半円 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸で囲まれた部分が，

x 軸の周りに 1 回転してできる。

よって

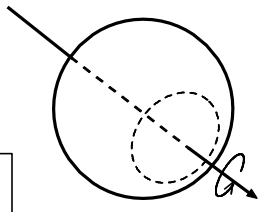
$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

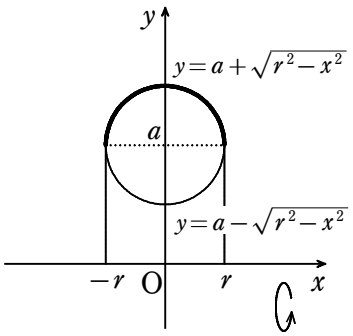
$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$



身の上に心配あると参上（球の体積の公式）

積分とその応用【体積】

応用例題８）　$0<r<b$ とする。円 $x^2+(y-b)^2=r^2$ を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



解答　$x^2+(y-a)^2=r^2$ を y について解くと

$(y-a)^2=r^2-x^2$

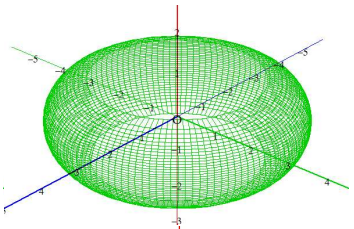
$y-a=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

$\therefore\quad y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}$

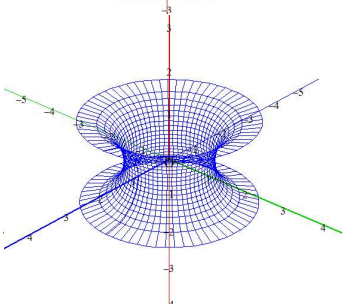
半円 $y=a+\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，

半円 $y=a-\sqrt{r^2-x^2}$ と x 軸および 2 直線 $x=-r$，$x=r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

V_1 を横に倒したもの



V_2 を横に倒したもの



$$V_1=\pi\int_{-r}^{r}\left(a+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}\left(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)dx,$$

$$V_2=\pi\int_{-r}^{r}\left(a-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{-r}^{r}\left(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)dx$$

よって　$V=V_1-V_2=4\pi a\boxed{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx}$

$=4\pi a\cdot\boxed{\frac{1}{2}\pi r^2}$

$=2\pi^2r^2a$

原点中心，半径 r の円の半円の面積

補足　応用例題の回転体は右のようになる。この立体を**円環体（トーラス）** という。

別解　パップス・ギュルダンの定理

詳しい説明は省略しますが…簡単に説明すると

（回転体の体積）＝（回転させたい図形の面積）×（重心の動いた距離）

（回転体の表面積）＝（回転させたい図形の周囲の長さ）×（重心の動いた距離）

ただし重心の求め方や、図形が自分自身と重ならないことなど注意も必要

例　回転させたい図形（円）の面積は　πr^2

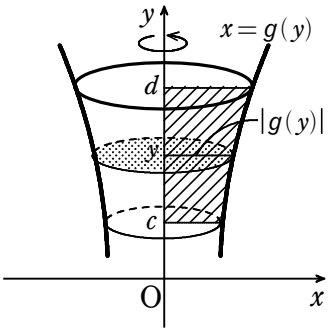
円の重心は中心なので，中心の軌道は半径 a の円の円周と一致する　ゆえに $2\pi a$

したがって　$V=\pi r^2\times 2\pi a=2\pi^2r^2a$

積分とその応用【体積】

□y 軸の周りの回転体の体積

右の図のように，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を考えてみよう。この場合も，x 軸の周りの回転体の体積と同様に考えれば，次の公式が成り立つ。

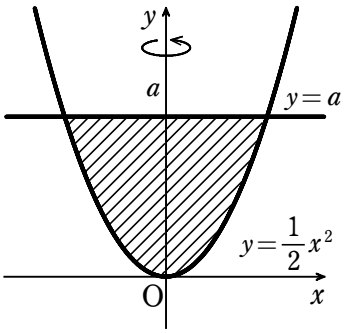


y 軸の周りの回転体の体積

$$V=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2dy=\pi\int_c^d x^2dy$$

ただし，$c<d$

例２） 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=a$ で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



解答　$y=\frac{1}{2}x^2$ を x について整理すると

$2y=x^2$

$\pm\sqrt{2y}=x$

$x\geqq 0$ とすると　$x=\sqrt{2y}$

この曲線を

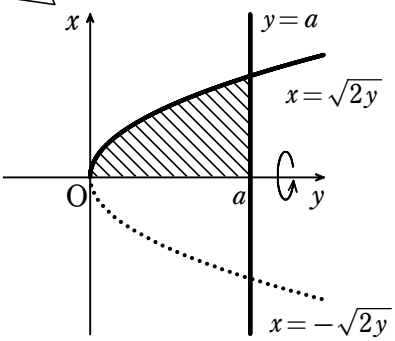
y 軸の周りに回転させると

$$V=\pi\int_0^a x^2dy$$

$$=\pi\int_0^a 2ydy$$

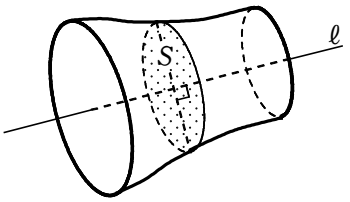
$$=\pi\left[y^2\right]_0^a$$

$$=\pi a^2$$



積分とその応用【体積】

研究 一般の回転体の体積

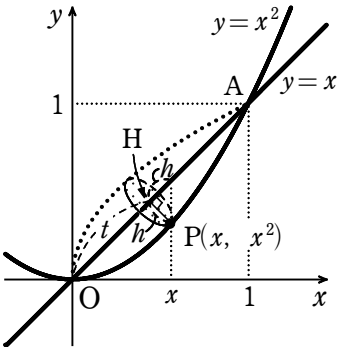


空間における直線 ℓ の周りの回転体の体積を求めるには，直線 ℓ に垂直な平面で回転体を切った切り口の面積 S の定積分を考えればよい。

例えば，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めてみよう。

放物線と直線の交点は $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1)$ で，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$ である。

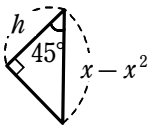
$0 \leqq x \leqq 1$ とし，放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ から直線に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$ とおく。



H を通り，直線 $y=x$ に垂直な平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$V=\int_0^{\sqrt{2}} S(t)\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}} h^2\,dt$$



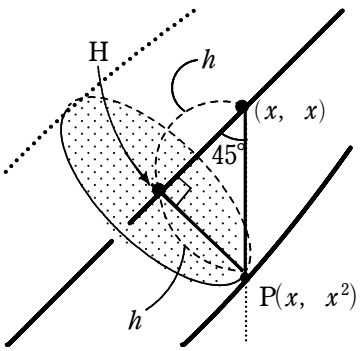
ここで　$1:\sqrt{2}=h:(x-x^2)$

$$\sqrt{2}\,h=x-x^2$$

$$\therefore\quad h=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$

また　$t=\sqrt{2}\,x-h=\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}$

t	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
x	$0 \longrightarrow 1$



x で微分して　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+2x}{\sqrt{2}}$

$$\therefore\quad dt=\frac{1+2x}{\sqrt{2}}\,dx$$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} h^2\,dt$

$$=\pi\int_0^1 \frac{(x-x^2)^2}{2}\cdot\frac{1+2x}{\sqrt{2}}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 (x^2-3x^4+2x^5)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}+\frac{x^6}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$$

$\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}=0$　$\therefore$　$x=0$

$\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$x+x^2=2$

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x>0$ より $x=1$

積分とその応用【曲線の長さと道のり】

□媒介変数表示された曲線の長さ

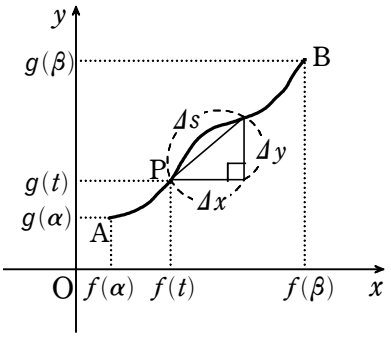
曲線の方程式が媒介変数 t を用いて $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ と表され，$f(t)$，$g(t)$ の導関数はともに連続であるとき，この曲線の長さ L を定積分で表してみよう。

A$(f(\alpha),\ g(\alpha))$，B$(f(\beta),\ g(\beta))$ とし，点 A から点 P$(f(t),\ g(t))$ までの曲線の長さを，t の関数と考えて，$s(t)$ で表す。また，t の増分 Δt に対する $s(t)$，$f(t)$，$g(t)$ の増分を，それぞれ Δs，Δx，Δy とすると，

$|\Delta t|$ が十分小さいとき

$$|\Delta s| \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \quad \cdots\cdots ①$$

と考えてよい。



点 P が曲線上を A から B に向かって動くとき，$s(t)$ は単調に増加する t の関数で，Δt と Δs は同符号である。

よって，① から

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \quad \cdots\cdots ②$$

導関数の定義 (p.136)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta t \longrightarrow 0$ のとき，② の両辺の差は 0 に近づくから

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$$

よって，$s(t)$ は t の関数 $\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$ の不定積分の 1 つで

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt=s(\beta)-s(\alpha)$$

ここで，$s(\alpha)=0$，$s(\beta)=L$ であるから，次のことが成り立つ。

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

以上の結果をまとめると，次のようになる。

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L は

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

積分とその応用【曲線の長さと道のり】

例題９） 次のサイクロイドの $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分の長さを求めよ。ただし， $a > 0$ とする。

$$x = a(\theta - \sin\theta),\quad y = a(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta),\quad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

よって，求める長さ L は

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)}\, d\theta \quad (\because a > 0)$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$ より

$4\sin^2\dfrac{\theta}{2} = 2(1-\cos\theta)$

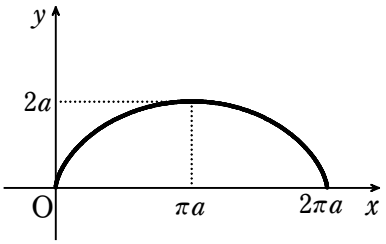
$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ では $\sin\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$ であるから

$$L = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= -4a(-1-1)$$

$$= 8a$$



積分とその応用【曲線の長さと道のり】

□陽関数 $y=f(x)$ の長さ

曲線の方程式が $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の形で与えられている場合は

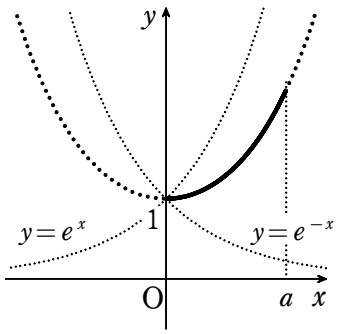
$$x=t,\quad y=f(t)\quad (a \leqq t \leqq b)$$

と考えると $\dfrac{dx}{dt}=1,\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$

である。よって，この曲線の長さ L は次のようになる。

> **曲線 $y=f(x)$ の長さ**
>
> 曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は
>
> $$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

例題１０） 曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ の $(0 \leqq x \leqq a)$ の部分の長さを求めよ。



$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ から

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2$$

$$=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})$$

$$=\frac{1}{4}(4+e^{2x}-2+e^{-2x})$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})$$

$$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$$

よって，求める長さ L は

$$L=\int_0^a \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}\{(e^a-e^{-a})-(e^0-e^0)\}$$

$$=\frac{1}{2}(e^a-e^{-a})$$

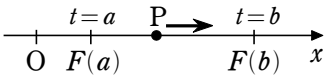
【注意】$a>0$ とするとき，$y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ で表される曲線を **懸垂線** または **カテナリー** という。

しなやかな糸などが自身の重さで垂れ下がったときにできる形である。

積分とその応用【曲線の長さと道のり】

□直線上を運動する点の道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x=F(t)$，速度を $v=f(t)$ とすると，速度の定義により



$$F'(t)=f(t) \quad \text{すなわち} \quad F(t)=\int f(t)\,dt$$

$t=a$ から $t=b$ までの点 P の位置の変化量は $F(b)-F(a)$ であり，$F(t)$ は $f(t)$ の不定積分であるから

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

となる。これより

$$F(b)=F(a)+\int_a^b f(t)\,dt$$

また，$t=a$ から $t=b$ までの点 P の 道のり は $|f(t)|$ の定積分 $\int_a^b |f(t)|\,dt$ で表される。位置の変化量 $F(b)-F(a)$ と道のりが一致するのは，常に $f(t)\geqq 0$ である場合に限る。

以上のことをまとめると，次のようになる。

速度と位置

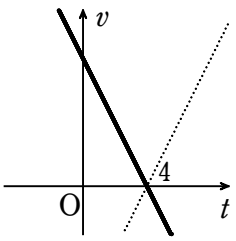
数直線上を運動する点 P の速度を $v=f(t)$ とし，$t=a$ のときの P の座標を k とする。

1　$t=b$ における P の**座標（位置）** x は　$x=k+\int_a^b v\,dt=k+\int_a^b f(t)\,dt$

2　$t=a$ から $t=b$ までの P の**位置の変化量** s は　$s=\int_a^b v\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$

3　$t=a$ から $t=b$ までの P の**道のり** l は　$l=\int_a^b |v|\,dt=\int_a^b |f(t)|\,dt$

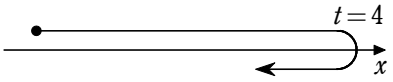
例３） 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度が $v=8-2t$ で表されているとする。



$t=0$ から $t=4$ までは $v>0$，このときの点 P の位置の変化は

$$\int_0^4 (8-2t)\,dt=\left[8t-t^2\right]_0^4=(32-16)-0=16$$

$t=4$ から $t=6$ までは $v<0$，このときの点 P の位置の変化は



$$\int_4^6 (8-2t)\,dt=\left[8t-t^2\right]_4^6=(48-36)-(32-16)$$

$$=12-16=-4$$

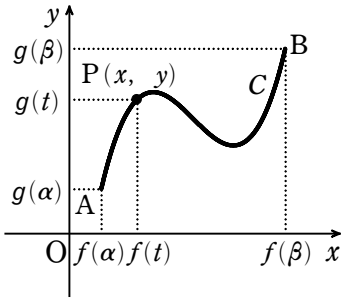
よって　$16-(-4)=16+4=20$

方針　一般に，数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とすると，

$t=a$ から $t=b$ までに点 P が通過する道のりは　$\int_a^b |v|\,dt$

積分とその応用【曲線の長さと道のり】

□平面上を運動する点の道のり



座標平面上で，点 $P(x,\ y)$ が曲線 C 上を動き，x，y が，時刻 t の関数として，次のように表されるとする。

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

時刻 $t=\alpha$，$t=\beta$ に対する点 P の位置を，それぞれ点 A，B とし，点 P が $\alpha \leqq t \leqq \beta$ の間に，曲線 C 上を点 A から点 B に向かって動くときの P の道のり l は，A から B までの曲線 C の長さに等しい。よって，曲線の長さの公式から

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

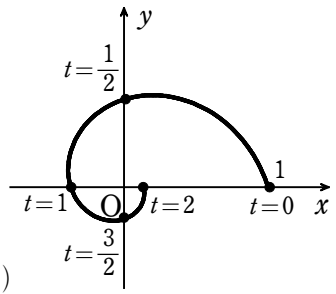
このとき，点 P の速度を $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ で表すと

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

であるから，道のり l は，次の式で表される。

平面上の道のり

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}|\vec{v}|\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$



例題） 点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$x=e^{-t}\cos\pi t$，$y=e^{-t}\sin\pi t$ で表されるとき，

$t=0$ から $t=2$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ。

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)$$

より $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=e^{-2t}(\cos^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t+\pi^2\sin^2\pi t)$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin\pi t-\pi\cos\pi t)$$

より $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(\sin^2\pi t-2\pi\sin\pi t\cos\pi t+\pi^2\cos^2\pi t)$

よって，求める道のり l は

$$l=\int_0^2\sqrt{e^{-2t}\{\cos^2\pi t+\sin^2\pi t+\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)\}}\,dt$$

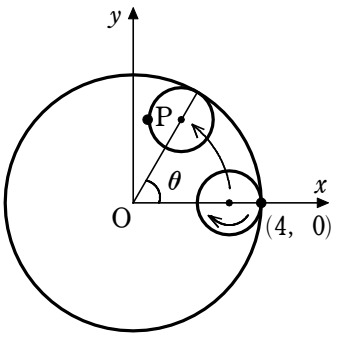
$$=\int_0^2\sqrt{e^{-2t}(1+\pi^2)}\,dt=\sqrt{1+\pi^2}\int_0^2 e^{-t}dt$$

$$=\sqrt{1+\pi^2}\left[-e^{-t}\right]_0^2$$

$$=\sqrt{1+\pi^2}(-e^{-2}+e^{0})=\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

積分とその応用【曲線の長さと道のり】

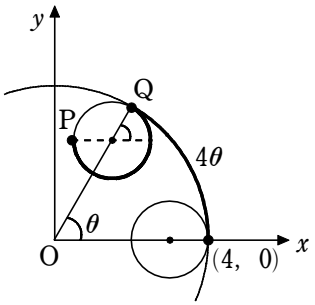
xy 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が，内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する。このとき，円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし，初めに点 P は点 $(4,\ 0)$ の位置にあるものとする。



(1) 図のように，x 軸と円 C の中心のなす角度が θ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ となったときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。

(2) 点 P の軌跡の長さを求めよ。

解答 (1) 円 C の中心を O′，円 C と円 E の接点を Q とおくと，$\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}=4\theta$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$
$$=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)+(\cos(\theta-4\theta),\ \sin(\theta-4\theta))$$
$$=(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$$

よって　　$\mathrm{P}(3\cos\theta+\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$

(2) $x=3\cos\theta+\cos 3\theta$，$y=3\sin\theta-\sin 3\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=-3(\sin\theta+\sin 3\theta),\quad \frac{dy}{d\theta}=3(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

よって

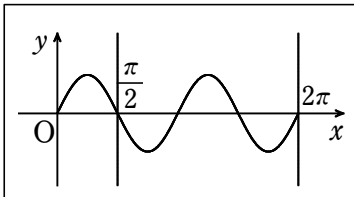
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=9\{(\sin\theta+\sin 3\theta)^2+(\cos\theta-\cos 3\theta)^2\}$$
$$=9\{(\sin^2\theta+2\sin 3\theta\sin\theta+\sin^2 3\theta)+(\cos^2\theta-2\cos 3\theta\cos\theta+\cos^2 3\theta)\}$$
$$=9\{2(1+\sin 3\theta\sin\theta-\cos 3\theta\cos\theta)\}$$
$$=18(1-\cos 4\theta)$$
$$=36\sin^2 2\theta$$

$\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta$
$=\cos(3\theta+\theta)=\cos 4\theta$

したがって，点 P の軌跡の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{36\sin^2 2\theta}\,d\theta$$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ より
$2\sin^2 2\theta=1-\cos 4\theta$



山の部分が４つ分

$$=6\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|\,d\theta$$
$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=24\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-12(-1-1)$$
$$=24$$

【北海道大学　2005】