複素数平面【複素数平面】 p.6～12

□複素数平面

$i^2=-1$

数学Ⅱで学んだように，

複素数は 2 つの実数 a，b と**虚数単位** i を用いて

$$a+bi$$

の形で表される。

以下，複素数 $a+bi$ と書いた場合，
文字 a，b は実数を表すものとする。

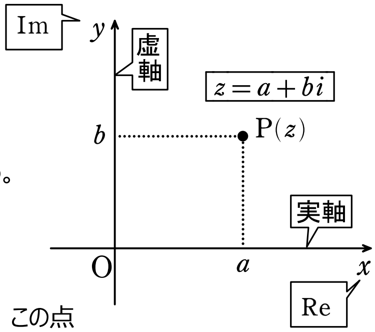
複素数 $a+bi$ について，a をその**実部**といい，b をその**虚部**という。
たとえば，$2+3i$ の実部は 2，虚部は 3 である。

$b=0$ のときの複素数 $a+0i$ は実数 a を表す。$b\neq 0$ のときの複素数 $a+bi$ を**虚数**といい，とくに $a=0$ である虚数 bi を**純虚数**という。

複素数 $a+bi$ に対して，座標平面上の点 $(a,\ b)$ を対応させると，どんな複素数も座標平面上の点で表すことができる。このように，複素数を点で表す座標平面を **複素数平面** または **複素平面** という。

複素数平面のことを，
ガウス平面と呼ぶことがある。

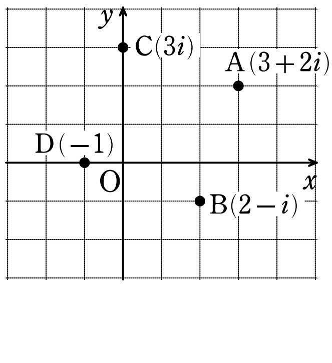
複素数平面上の 1 つの点は，1 つの複素数を表す。



複素数平面を考える場合， x 軸を **実軸**，y 軸を **虚軸** という。
実軸上の点は実数を表し，虚軸上の原点 O 以外の点は純虚数を表す。

複素数平面上で複素数 z を表す点 P を P(z) と書く。また，この点を 点 z ということがある。たとえば，点 0 とは原点 O のことである。

例１） 複素数平面上に，点 A$(3+2i)$，B$(2-i)$，C$(3i)$，D(-1) を図示すると，右のようになる。㊎



複素数平面【複素数平面】　p.6～12

複素数 z と**共役な複素数**を $\overline{z}$ で表す。$\overline{z}$ を z の **共役複素数** ともいう。

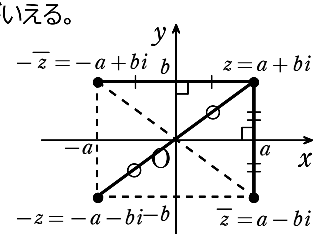
複素数 $z=a+bi$ に対しては，　$\overline{z}=a-bi$，$-z=-a-bi$　である。

複素数平面上で，z，$\overline{z}$，$-z$ を表す点を図示すると，次のことがいえる。

点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称である。

点 z と点 $-z$ は原点に関して対称である。

点 z と点 $-\overline{z}$ は虚軸に関して対称である。

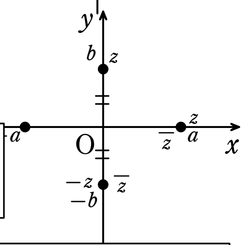


注意　$\overline{z}$ の共役複素数は z である。すなわち，$\overline{\overline{z}}=z$ である。

点 z が実軸上にあれば，点 $\overline{z}$ は点 z と一致するから，　$\overline{z}=z$ である。

原点 O と異なる点 z が虚軸上にあれば，点 $\overline{z}$ は虚軸上にあり，

かつ点 z と原点 O に関して対称になるから，　$\overline{z}=-z$ である。



複素数 z について，次のことが成り立つ。

『 z が実数 』ならば「$z=a$」
「$\overline{z}=a$」であるから『 $\overline{z}=z$ 』

1　z が実数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=z$
2　z が純虚数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=-z$　　ただし，$z\neq 0$

『 z が純虚数 』ならば「$z=bi$」
「$\overline{z}=-bi$」であるから『 $\overline{z}=-z$ 』

練習３） 複素数 $z=a+bi$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a，b をそれぞれ z と $\overline{z}$ で表せ。

また z と $\overline{z}$ について　$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$\overline{\overline{z}}=\overline{a-bi}=a+bi=z$

解答　$z=a+bi$，$\overline{z}=a-bi$ から

$z+\overline{z}=2a$，$z-\overline{z}=2bi$　よって　$a=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$，$b=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$

(2)　(1) の結果を利用して，次の２つの同値関係１，２が成り立つことを確かめよ。

1　z が実数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=z$

2　z が純虚数　$\Longleftrightarrow$　$\overline{z}=-z$　　ただし，$z\neq 0$

解答　【１について】　$z=a+bi$ について，z が実数であるとすると　　$b=0$

よって，(1) より　　$\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})=0$　したがって，$z-\overline{z}=0$ より　　$z=\overline{z}$

$z=\overline{z}$ とすると，(1) より　　$b=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})=0$　したがって，z は実数である。

以上より，「z が実数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=z$」が成り立つ。

【２について】　$z=a+bi$ について，z が純虚数であるとすると　　$a=0$，$b\neq 0$

よって，(1) より　　$\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=0$　ただし，$z\neq 0$

したがって，$z+\overline{z}=0$ より　　$\overline{z}=-z$　ただし，$z\neq 0$　このとき　　$z+\overline{z}=0$

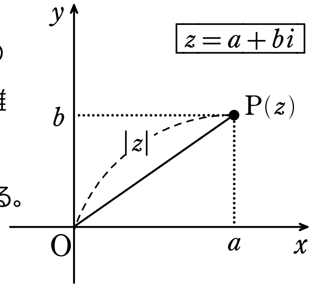
よって，(1) より　　$a=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=0$

このとき，$z\neq 0$ より　　$b\neq 0$　　　したがって，z は純虚数である。

以上より，「z が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{z}=-z$　ただし，$z\neq 0$」が成り立つ。

複素数平面【複素数平面】　p.6～12

□複素数の絶対値



複素数平面上の 2 点 A(α)，B(β) 間の距離は，座標平面上の場合と同様に線分 AB の長さと考える。原点 O と点 P(z) との距離を，複素数 z の **絶対値** といい，$|z|$ で表す。

$z=a+bi$ のとき，$\mathrm{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$ であるから，次のことがいえる。

複素数の絶対値

複素数 $a+bi$ の絶対値は　$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

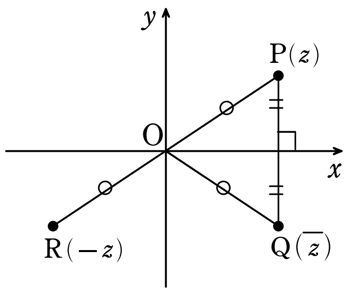
実部、虚部の２乗の和にルート

補足　z が実数のとき，$|z|$ は実数の絶対値と一致する。

例２） 複素数 $3+2i$ の絶対値は

$$|3+2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

終



原点 O と点 P(z)，Q$(\overline{z})$，R$(-z)$ の位置関係により，

$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}$

となるから，複素数 z について，

絶対値の定義から次のことが成り立つ

複素数の絶対値

1　$|z|\geqq 0$　とくに　$|z|=0 \iff z=0$

2　$|z|=|-z|=|\overline{z}|$

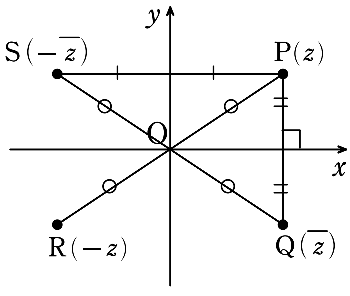
3　$|z|^2=z\,\overline{z}$

練習５） 複素数 z について，$|-\overline{z}|=|z|$ であることを確かめよ。

解答　$|-z|=|z|$ より　$|-\overline{z}|=|\overline{z}|$

さらに，$|\overline{z}|=|z|$ であるから

$|-\overline{z}|=|z|$



別解　点 P(z) と点 S$(-\overline{z})$ は

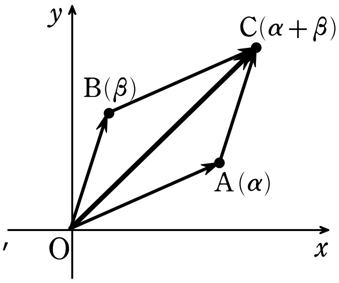
虚軸に関して対称であるから　$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}$

よって　$|-\overline{z}|=|z|$

複素数平面【複素数平面】 p.6～12

□複素数の和，差の図示

ベクトルのように



複素数の和，差を複素数平面上で図示してみよう。

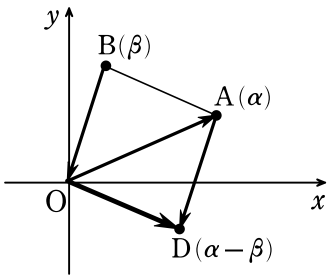
2 つの複素数

$$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$$

の和は $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ である。

そこで，複素数平面上に 3 点A(α)，B(β)，C$(\alpha+\beta)$ をとると，次のことがいえる。

> 点 C$(\alpha+\beta)$ は，原点 Oを点 B(β) に移す平行移動によって
> 点 A(α) が移る点である。
> **注意** 右上の図において，四角形 OACB は平行四辺形である。



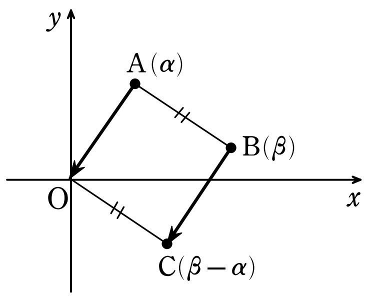
2 つの複素数 α，β とその差 $\alpha-\beta$ について，次の等式が成り立つ。

$$(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$$

そこで，複素数平面上に 3 点 A(α)，B(β)，D$(\alpha-\beta)$ をとると，次のことがいえる。

> 点 D$(\alpha-\beta)$ は，点 B(β) を原点 O に移す平行移動によって
> 点 A(α) が移る点である。
> **注意** $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ であるから，
> $\alpha+\beta$ の場合と逆向きの平行移動を考えている。

ベクトル的に言えば
$\vec{\alpha}$ に $-\vec{\beta}$ を足したもの



複素数の差を図示することにより，次のことがいえる。

2 点 A(α)，B(β) 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|$$

ベクトル的に言えば
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$

例3） 2 点 A$(2+3i)$，B$(5+i)$ 間の距離 AB は

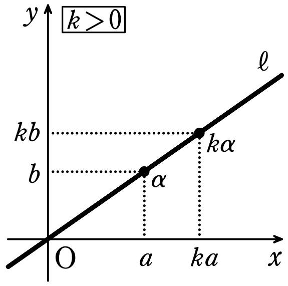
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=|(5+i)-(2+3i)|\\&=|3-2i|\\&=\sqrt{3^2+(-2)^2}\\&=\sqrt{13}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$

終

複素数平面【複素数平面】 p.6～12

□複素数の実数倍



実数 k と複素数 $\alpha=a+bi$ について，$k\alpha=ka+kbi$ である。
よって，$\alpha \fallingdotseq 0$ のとき，点 $k\alpha$ は 2 点 0，α を通る直線 ℓ 上にある。
$k=0$ のとき点 $k\alpha$ は点 0 と一致する。
逆に，この直線 ℓ 上の点は，α の実数倍の複素数を表す。
補足 点 $(-k)\alpha$ は，点 $k\alpha$ と原点 O に関して対称である。

よって，$\alpha \fallingdotseq 0$ のとき，次のことが成り立つ。

3 点 0，α，β が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある

当然ながら
$\alpha=k\beta$ でも良い

ベクトルのように考えると
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

複素数 α を表す点を A，$k\alpha$ を表す点を B とすると，
線分 OB の長さは線分 OA の長さの $|k|$ 倍である。すなわち，$\mathrm{OB}=|k|\mathrm{OA}$ である。
補足 $|k\alpha|=|k||\alpha|$ が成り立つ。

例題１） $\alpha=x-i$，$\beta=4+2i$ とする。
2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

解答 $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。
$4+2i=k(x-i)$ から　$4+2i=kx-ki$
よって　$4=kx$，$2=-k$
$k=-2$ であるから　$x=\dfrac{4}{k}=\dfrac{4}{-2}=-2$

○＋□i＝○′＋□′i のとき
○＝○′，□＝□′

別解 $\alpha=k\beta$ となる実数 k がある。
$x-i=k(4+2i)$ から　$x-i=4k+2ki$
よって　$x=4k$，$-1=2k$
$k=-\dfrac{1}{2}$ であるから　$x=4k=-\dfrac{4}{2}=-2$

○＋□i＝○′＋□′i のとき
○＝○′，□＝□′

複素数平面【複素数平面】　p.6～12

□共役複素数の性質

複素数 α，β について，次のことが成り立つ。

共役複素数の性質

1　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　2　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

3　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$　　4　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

３が成り立つから
$\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$ も成り立つ

【証明】

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とすると　$\overline{\alpha}=a-bi$，$\overline{\beta}=c-di$

$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$，

$\overline{\alpha+\beta}=(a+c)-(b+d)i$

$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$，

$\overline{\alpha-\beta}=(a-c)-(b-d)i$

よって　$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i=\overline{\alpha+\beta}$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i=\overline{\alpha-\beta}$

また　$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

$\overline{\alpha\beta}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$，

$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\dfrac{a-bi}{c-di}=\dfrac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\dfrac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

よって　$\overline{\alpha}\ \overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i=\overline{\alpha\beta}$，　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$　終

例４） 複素数 α，β について，$\alpha+\beta=1$ のとき，両辺の共役複素数を考えると

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{1}$　すなわち　$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=1$　終

性質の１より

練習９） 複素数 α，β について，$\alpha+\beta+i=0$ のとき，$\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ を求めよ。

$\alpha+\beta+i=0$ から　$\alpha+\beta=-i$

両辺の共役複素数を考えると

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{-i}$　すなわち　$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=i$

複素数平面【複素数平面】 p.6～12

$z=a+bi$ とすると，$\overline{z}=a-bi$ であるから

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$，　　$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

よって，複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ について，次のことが成り立つ。

> 1　$z+\overline{z}$ は実数である　　　2　$z\overline{z}=|z|^2$

例題２） 複素数 α について，次のことを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数である。

考え方 … 上の２と「z が実数 $\iff \overline{z}=z$」を利用する。

共役な複素数が等しいことを示す

証明　$|\alpha|=1$ のとき，$|\alpha|^2=1$ であるから

$|z|^2=z\overline{z}$

$\alpha\overline{\alpha}=1$　すなわち　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

ここで　$\overline{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}=\overline{\alpha}+\overline{\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)}=\overline{\alpha}+\dfrac{1}{\overline{\alpha}}=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$

よって，$\overline{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ であるから，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数である。終

補足　上の１を利用して，次のように証明することもできる。

$|\alpha|=1$ のとき $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ であるから　$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}$

$\alpha+\overline{\alpha}$ は実数であるから，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ は実数である。

練習） $|z|=2$ かつ $|z+3|=3$ を満たす複素数 z について，次の値を求めよ。

(1)　$z\overline{z}$　　　　　(2)　$z+\overline{z}$

(1)　$z\overline{z}=|z|^2=2^2=4$

$z\overline{z}=|z|^2$

困ったら２乗

(2)　$|z+3|=3$ の両辺を２乗すると　$|z+3|^2=9$

$|z|^2=z\overline{z}$

よって　$(z+3)(\overline{z+3})=9$

$(z+3)(\overline{z}+3)=9$

展開して整理すると　$z\overline{z}+3z+3\overline{z}=0$

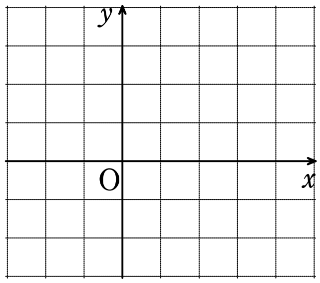
$z\overline{z}=4$ であるから　$4+3(z+\overline{z})=0$

したがって　$z+\overline{z}=-\dfrac{4}{3}$

複素数平面【複素数平面】　練習問題

練習１） 次の点を右の図に示せ。

$P(3-2i)$，$Q(-1+i)$，$R(4)$，$S(-i)$

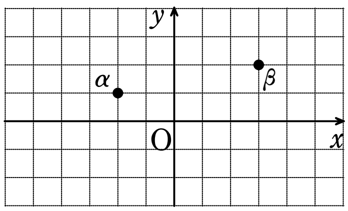


練習４） 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$3-2i$　　(2)　$-2+4i$　　(3)　-5　　(4)　$3i$

練習６） 右の図の複素数平面上の点 α，β について，次の点を図に示せ。

(1)　$\alpha+\beta$　　(2)　$\alpha-\beta$



複素数平面【複素数平面】　練習問題

練習７） 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　A$(2+3i)$，B$(1+6i)$　　(2)　C$(3-4i)$，D$(1-2i)$

練習８） $\alpha=1+yi$，$\beta=3-6i$ とする。2 点 A(α)，B(β) と原点 O が一直線上にあるとき，実数 y の値を求めよ。

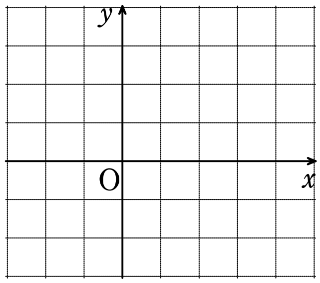
練習１０） 複素数 α について，次のことを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき　$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

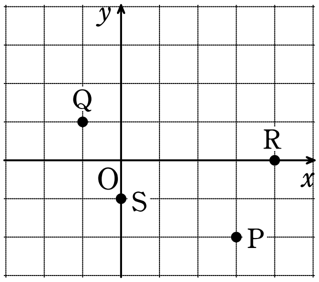
複素数平面【複素数平面】　練習問題

練習１） 次の点を右の図に示せ。

P$(3-2i)$，Q$(-1+i)$，R(4)，S$(-i)$



(解説)



練習４） 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$3-2i$　　(2)　$-2+4i$　　(3)　-5　　(4)　$3i$

(解説)

(1)　$|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

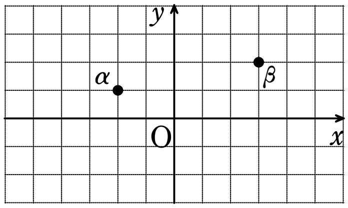
(2)　$|-2+4i|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(3)　$|-5|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

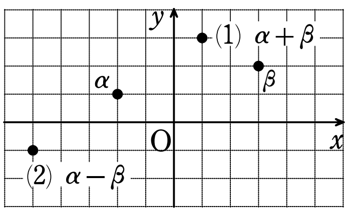
(4)　$|3i|=\sqrt{0^2+3^2}=3$

練習６） 右の図の複素数平面上の点 α，β について，次の点を図に示せ。

(1)　$\alpha+\beta$　　(2)　$\alpha-\beta$



(解説)



複素数平面【複素数平面】 練習問題

練習７） 次の２点間の距離を求めよ。

(1) $\mathrm{A}(2+3i)$，$\mathrm{B}(1+6i)$　　(2) $\mathrm{C}(3-4i)$，$\mathrm{D}(1-2i)$

(解説)

(1) $\mathrm{AB}=|(1+6i)-(2+3i)|$

$=|-1+3i|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

(2) $\mathrm{CD}=|(1-2i)-(3-4i)|$

$=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}$

$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

練習８） $\alpha=1+yi$，$\beta=3-6i$ とする。2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき，実数 y の値を求めよ。

(解説)

$\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。

$3-6i=k(1+yi)$ から　　$3-6i=k+kyi$

よって　　$3=k$，$-6=ky$

したがって　　$y=\dfrac{-6}{k}=\dfrac{-6}{3}=-2$

練習１０） 複素数 α について，次のことを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき　$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

(解説)

$|\alpha|=1$ のとき，$|\alpha|^2=1$ であるから

$\alpha\overline{\alpha}=1$　すなわち　$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

ここで　　$\overline{\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}}=\overline{\alpha^2}+\overline{\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)}=(\overline{\alpha})^2+\dfrac{1}{(\overline{\alpha})^2}=\dfrac{1}{\alpha^2}+\alpha^2$

よって，$\overline{\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}}=\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ であるから，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

別解　$|\alpha|=1$ のとき $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ であるから　$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=\alpha^2+\overline{\alpha^2}$

$\alpha^2+\overline{\alpha^2}$ は実数であるから，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は実数である。