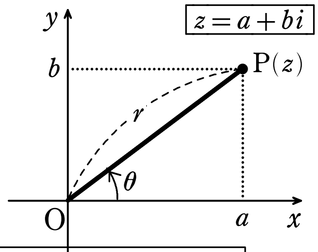
複素数平面【複素数の極形式】　p.13～18

□極形式

複素数平面上で，0 でない複素数 $z=a+bi$ を表す点をPとし，線分 OP の長さを r とする。また，半直線 OPを，実軸の正の部分を始線とした動径と考えて，動径 OP の表す角を θ とすると



$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$ である。

よって，0 でない複素数 z は次の形にも表される。

$$\boldsymbol{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

ただし，$r>0$ で，θ は弧度法で表された一般角である。

負の角や 2π より大きい角も考えられる。

これを複素数 z の **極形式** という。r は z の絶対値である。
また，角 θ を z の **偏角** といい，$\mathbf{arg}\,z$ で表す。

arg は「偏角」を意味する英語 argument を略したものである。

すなわち　$r=|z|$，$\theta=\arg z$

とくに，絶対値が 1 の複素数 z の極形式は，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ である。

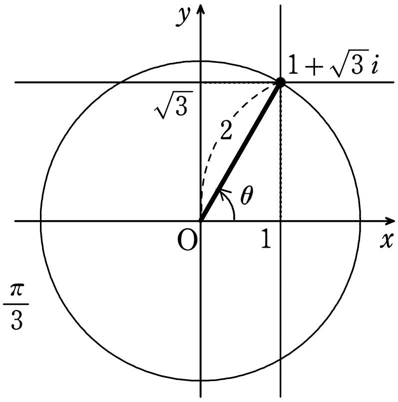
複素数 z の偏角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲や $-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲でただ 1 通りに定まる。

z の偏角の 1 つを θ_0 とすると，一般には，次のように表される。

$$\arg z=\theta_0+2n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

注意 以下，複素数を極形式で表すとき，その複素数は 0 でないものとする。

例題３） 複素数 $1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ。
ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。



解答　$1+\sqrt{3}i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

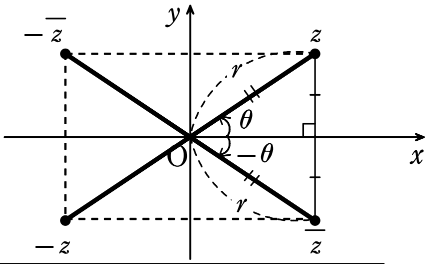
$$1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\text{なので}$$

合成の要領で

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad 0\leqq\theta<2\pi\text{ では}\quad\theta=\frac{\pi}{3}$$

よって　$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

複素数 z と $\overline{z}$ について，点 z と点 $\overline{z}$ は実軸に関して対称である。よって，複素数 z の偏角を θ とするとき，$\overline{z}$ の偏角の 1 つは，$\arg\overline{z}=-\theta$ である。
また，$|z|=|\overline{z}|$ であるから，z と $\overline{z}$ の極形式について，次のことがいえる。



$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$\overline{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

虚部の符号違い⇔実軸に関して対象⇔負角

複素数平面【複素数の極形式】　p.13～18

□極形式で表された複素数の積と商

ここでは，極形式で表された複素数の積と商について考えてみよう。

まず，絶対値が 1 である 2 つの複素数

$$\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\quad \cos\theta_2+i\sin\theta_2$$

の積と商の計算をしてみよう。

この計算には，三角関数の加法定理を用いる。

$\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$
$\sin(\theta_1-\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2$
$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$
$\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$

積　$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=\underline{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)}+i\underline{(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)}$$

$$=\underline{\cos(\theta_1+\theta_2)}+i\underline{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

商　$\dfrac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$

$$=\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{\underline{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}+i\underline{(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

相互関係

$$=\underline{\cos(\theta_1-\theta_2)}+i\underline{\sin(\theta_1-\theta_2)}$$

一般に，次のことがいえる。

極形式で表された複素数の積と商

$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

大きさはそのまま掛けたり割ったり
偏角は掛け算は足し算、割り算は引き算へ

例５）　$\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$ 終

複素数の積と商について，次のことが成り立つ。

複素数の積と商の絶対値と偏角

1　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$　　$\arg\alpha\beta=\arg\alpha+\arg\beta$

2　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$　　$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\arg\alpha-\arg\beta$

大きさはそのまま掛けたり割ったり
偏角は掛け算は足し算、割り算は引き算へ

注意　偏角についての等式では，2π の整数倍の違いは無視して考える。

1 より，複素数 z と自然数 n について，$|z^n|=|z|^n$ が成り立つ。

複素数平面【複素数の極形式】　p.13～18

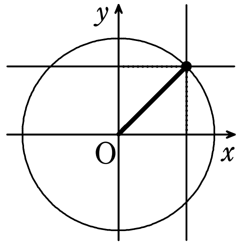
□複素数の積と図形

2 つの複素数 α と z の積 αz について，その絶対値と偏角は，次のようになる。

$$|\alpha z|=|\alpha||z|,$$

$$\arg\alpha z=\arg\alpha+\arg z$$

このことから，複素数の積について，複素数平面上で考えてみよう。



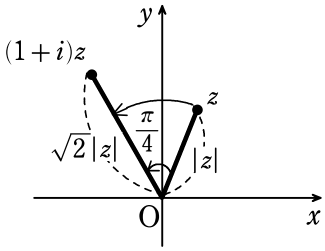
例 6）　$1+i$ は $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ より，

点 $(1+i)z$ は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，

原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。　終



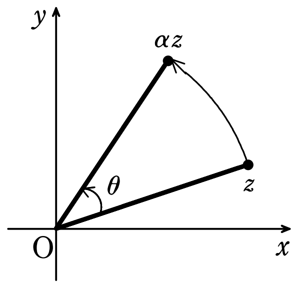
絶対値が 1 である複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と複素数 z との積 αz について，その絶対値と偏角は次のようになる。

$$|\alpha z|=|\alpha||z|=1\cdot|z|=|z|,$$

$$\arg\alpha z=\arg\alpha+\arg z=\theta+\arg z$$

このことから，次のことがいえる。

> **原点を中心とする回転**
>
> $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ と z に対して，
>
> 点 αz は，点 z を原点を中心として
>
> θ だけ回転した点である。



とくに，$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$，$-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ であるから，次のことがいえる。

点 iz は，点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

点 $-iz$ は，点 z を原点を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

注意　$\overline{\alpha}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ であるから，

点 $\overline{\alpha}z$ は，点 z を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点である。

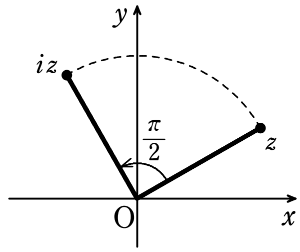
複素数平面【複素数の極形式】　p.13～18

例） 点 z と点 iz の位置関係を考えてみよう。

$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$，$|i|=1$ であるから，

点 iz は，

点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。 終



例題４）　$z=2-4i$ とする。

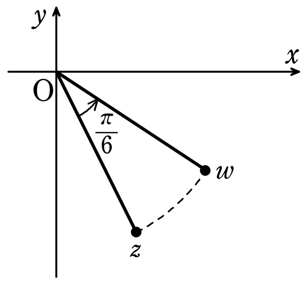
点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

解答　$w=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)z$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(2-4i)$

$=\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}\,i-2i^2$

$=(\sqrt{3}+2)+(-2\sqrt{3}+1)i$



応用例題１）

$\alpha=5+\sqrt{3}\,i$ とする。複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形が，正三角形であるとき，β の値を求めよ。

考え方 … 点 β は，点 α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点である。

解答　点 β は，点 α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$\beta=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\alpha$

$=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5+\sqrt{3}\,i)$

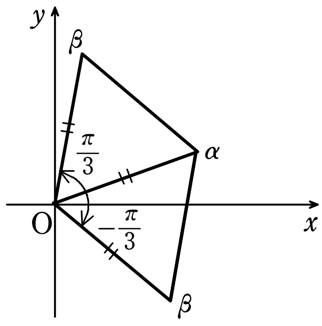
$=1+3\sqrt{3}\,i$

または

$\beta=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$

$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(5+\sqrt{3}\,i)$

$=4-2\sqrt{3}\,i$

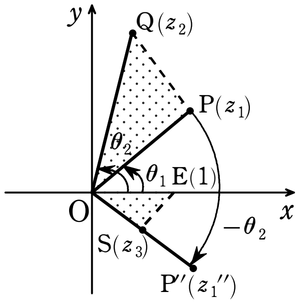


よって　$\beta=1+3\sqrt{3}\,i$　または　$\beta=4-2\sqrt{3}\,i$

複素数平面【複素数の極形式】　p.13～18

商について，$z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$ とおくと $|z_3|=\dfrac{r_1}{r_2}$，$\arg z_3=\theta_1-\theta_2$

よって，点 $\mathrm{S}(z_3)$ は，点 $\mathrm{P}(z_1)$ を原点を中心として角 $-\theta_2$ だけ回転した点 $\mathrm{P}''(z_1'')$ を $\dfrac{1}{r_2}$ 倍した点である。

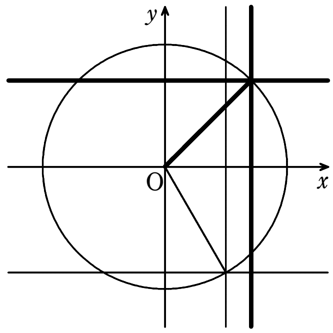


$z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$ が実数でないとき，△EOS は △QOP を角 $-\theta_2$ だけ回転し，$\dfrac{1}{r_2}$ 倍に拡大または縮小したものであることがわかる。

すなわち，△EOS と △QOP は相似であり，その相似比は $1：r_2$ である。

例）　複素数 $z_1=1+i$，$z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ に対し，z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ をそれぞれ極形式で表せ。

また，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。



$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$z_2=\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから

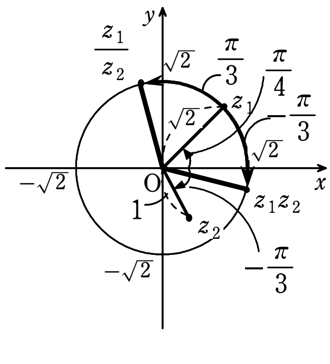
積 ⇒ 距離は積，argは和

商 ⇒ 距離は商，argは差

$$z_1z_2=\sqrt{2}\left\{\cos\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right\}+i\sin\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right\}\right\}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left\{\cos\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+i\sin\left\{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\right\}$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

点 z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ を図示すると，図のようになる。



複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１１） 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は，(1)，(2) では $0 \leqq \theta < 2\pi$，(3)，(4) では $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}+i$　　(2)　$2+2i$　　(3)　$1-\sqrt{3}i$　　(4)　$-i$

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１２） 複素数 z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。このとき，$-z$ の極形式について，次のことを示せ。

$$-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$$

練習１３） 次の複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ \beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

練習１４） 複素数 α，β について，$|\alpha|=2$，$|\beta|=3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$|\alpha\beta|$　　(2)　$|\alpha^3|$　　(3)　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$　　(4)　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|$

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１５）次の点は，点 z をどのように移動した点であるか。

(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)z$　　(2)　$(-1+i)z$　　(3)　$2iz$

練習１６）$z=4-2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1)　$\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$\dfrac{2}{3}\pi$　　(3)　$-\dfrac{\pi}{2}$　　(4)　$-\dfrac{\pi}{3}$

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１７）$\alpha=2+2i$ とする。複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形が，正三角形であるとき，β の値を求めよ。

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１１） 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は，(1)，(2) では $0 \leqq \theta < 2\pi$，(3)，(4) では $-\pi < \theta \leqq \pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3}+i$　　(2)　$2+2i$　　(3)　$1-\sqrt{3}i$　　(4)　$-i$

(解説)

(1)　$\sqrt{3}+i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2)　$2+2i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ では　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

よって　$2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3)　$1-\sqrt{3}i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\pi < \theta \leqq \pi$ では　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

(4)　$-i$ の絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$$

$$\cos\theta=0,\ \sin\theta=-1$$

$-\pi < \theta \leqq \pi$ では　$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$

よって　$-i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１２） 複素数 z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。このとき，$-z$ の極形式について，次のことを示せ。

$$-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$$

(解説)

点 $-z$ は点 z と原点に関して対称である。

よって，$-z$ の偏角の１つは　$\theta+\pi$

また　$|-z|=|z|$

したがって　$-z=r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}$

$\boxed{\text{別解}}$　$r\{\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)\}=-r(\cos\theta+i\sin\theta)=-z$

練習１３） 次の複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$$\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ \beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(解説)

$$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

練習１４） 複素数 α，β について，$|\alpha|=2$，$|\beta|=3$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$|\alpha\beta|$　　(2)　$|\alpha^3|$　　(3)　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$　　(4)　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|$

(解説)

(1)　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|=2\times3=6$

(2)　$|\alpha^3|=|\alpha|^3=2^3=8$

(3)　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{2}{3}$

(4)　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right|=\dfrac{|\beta|}{|\alpha|^2}=\dfrac{3}{2^2}=\dfrac{3}{4}$

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１５） 次の点は，点 z をどのように移動した点であるか。

(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)z$　　(2)　$(-1+i)z$　　(3)　$2iz$

(解説)

(1)　$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって，点 $(1+\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点である。

(2)　$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

よって，点 $(-1+i)z$ は，点 z を原点を中心として $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。

(3)　$2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって，点 $2iz$ は，点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点である。

練習１６） $z=4-2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1)　$\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$\dfrac{2}{3}\pi$　　(3)　$-\dfrac{\pi}{2}$　　(4)　$-\dfrac{\pi}{3}$

(解説)

(1)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(4-2i)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(4-2i)$

$$=(2\sqrt{3}+1)+(-\sqrt{3}+2)i$$

(2)　$\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)(4-2i)=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$

$$=(-2+\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$$

(3)　$\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}(4-2i)=-i(4-2i)$

$$=-2-4i$$

(4)　$\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(4-2i)=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$

$$=(2-\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})i$$

複素数平面【複素数の極形式】　練習問題

練習１７） $\alpha=2+2i$ とする。複素数平面上の 3 点 0，α，β を頂点とする三角形が，正三角形であるとき，β の値を求めよ。

(解説)

点 β は，点 α を原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)$$
$$=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

または

$$\beta=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)$$
$$=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

よって　$\beta=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$　または　$\beta=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$