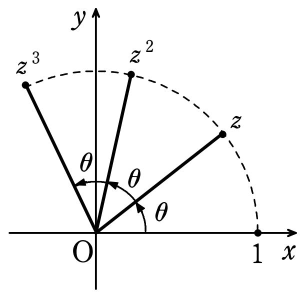
複素数平面【ド･モアブルの定理】　p.19～22

□ド・モアブルの定理



0 でない複素数に絶対値が 1 の複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ を掛けると，絶対値は変わらずに，偏角が θ だけ増える。

このことを用いて z の累乗を考えると

$$z^2=zz=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

$$z^3=zz^2=\cos(\theta+2\theta)+i\sin(\theta+2\theta)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

となり，一般の自然数 n について，次の等式が成り立つことがわかる。

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \qquad \cdots\cdots ①$$

0 でない複素数 w に対して $z^0=1$ と定める。このとき，① は $n=0$ のときにも成り立つことがわかる。

また，0 でない複素数 w と自然数 m に対して $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ と定めると

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$ なので

このとき，0 以上の整数 n について，次の等式が成り立つことがわかる。

$$z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos n\theta+i\sin n\theta}$$

$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos(-n)\theta+i\sin(-n)\theta \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② より，次の **ド・モアブルの定理** が成り立つ。

> **ド・モアブルの定理**
>
> n が整数のとき　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

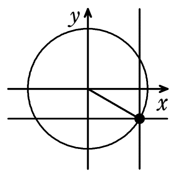
例 7) (1)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^4=\cos 4\times\dfrac{\pi}{3}+i\sin 4\times\dfrac{\pi}{3}$

$$=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　$\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{-6}=\cos(-6)\times\dfrac{\pi}{6}+i\sin(-6)\times\dfrac{\pi}{6}$

$$=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1$$ 終

例題 5)　$(\sqrt{3}-i)^6$ を計算せよ。



$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

解答　$\sqrt{3}-i=2\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)i\right\}=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

であるから　$(\sqrt{3}-i)^6=2^6\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^6$

$$=64\left\{\cos 6\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin 6\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=64\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}$$

$$=-64$$ 終

□複素数の n 乗根

複素数 α と正の整数 n に対して，方程式 $z^n=\alpha$ の解を，α の n **乗根** という。

0 でない複素数の n 乗根は n 個あることが知られている。

まず，1 の 3 乗根を，極形式を利用して求めてみよう。

$z^3=1$ のとき，$|z^3|=|z|^3=1$ かつ $|z|>0$ より　$|z|=1$

そこで，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおいて，ド・モアブルの定理を用いると，等式 $z^3=1$ は，次のように表される。

$$\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos 0+i\sin 0$$

$1=\cos 0+i\sin 0$ より
$1^3=\cos 3\times 0+i\sin 3\times 0$

両辺の偏角を比較すると，$3\theta=0+2k\pi$（k は整数）であるから，$\theta=\dfrac{2k\pi}{3}$ となる。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2 であるから，

2π 側には等号が付いていない！⇒ $k=3$ は不可

1 の 3 乗根は 3 個あり，次の式で得られる z_0，z_1，z_2 である。

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\quad (k=0,\ 1,\ 2)\ \cdots\cdots ①$$

① において，$k=0$，1，2 を代入すると

$k=0$ のとき　$z_0=1$

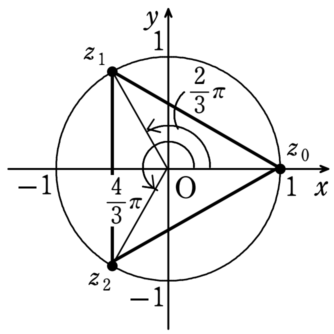
$k=1$ のとき　$z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=2$ のとき　$z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$x^3=1$ を解くと $x^3-1=0$ より
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
$\therefore\ x=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
これを極形式で表現したものと言える

となる。これらが 1 の 3 乗根である。

右の図のように，3 点 z_0，z_1，z_2 は単位円の周上にあり，円周を 3 等分する点である。よって，これらの点は単位円に内接する正三角形の頂点になっている。



一般に，n を自然数として，z を 1 の n 乗根としよう。

$z^n=1$ から　　　　$|z|^n=|z^n|=1$

$|z|$ は正の実数であるから　$|z|=1$

ここで，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，ド・モアブルの定理から　$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=1$

よって，$\cos n\theta=1$，$\sin n\theta=0$ であるから

$$n\theta=2k\pi\quad すなわち\quad \theta=\frac{2k\pi}{n}\quad (k\ は整数)$$

となる。

逆に，k を整数として

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \cdots\cdots ①$$

とおくと，ド・モアブルの定理より $(z_k)^n=1$ が成り立つから，z_k は 1 の n 乗根である。また，z_{n+k} と z_k の偏角は 2π だけ異なり，ともに絶対値は 1 であるから $z_{n+k}=z_k$ が成り立つ。よって，① の z_k のうち，互いに異なるものは　z_0，z_1，z_2，……，z_{n-1} の n 個である。

以上より，次のことが成り立つ。

> **1 の n 乗根**
>
> 自然数 n に対して，1 の n 乗根は，　次の n 個の複素数である。
>
> $$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
>
> $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

＜補足＞ $n\geqq 3$ のとき，1 の n 乗根を表す点は，単位円に内接する正 n 角形の各頂点である。
とくに，頂点の 1 つは点 1 である。

例８） 1 の 6 乗根は　$6\theta=2k\pi$ より　$\theta=\dfrac{1}{3}k\pi$

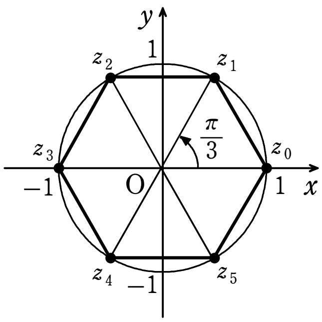
$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

よって　$z_k=\cos\dfrac{k\pi}{3}+i\sin\dfrac{k\pi}{3} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

すなわち

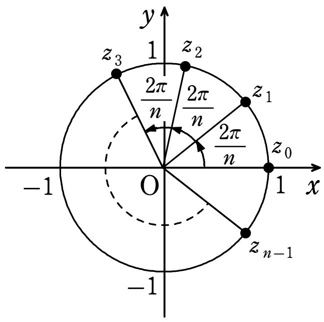
$$z_0=1,\quad z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3=-1,\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$ 終



6 個の 1 の 6 乗根は，点 1 が分点の 1 つとなるように，単位円を 6 等分する 6 個の分点を与えている。 よって，これらの点は単位円に内接する正六角形の頂点になっている。 終

> 一般に，自然数 n に対して，1 の n 乗根
>
> $$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
>
> $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$
>
> を表す点は，単位円を n 等分する n 個の分点である。
>
> 特に，分点の 1 つは点 1 である。

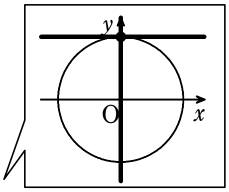


複素数平面【ド・モアブルの定理】 p.19～22

一般に，0 でない複素数の n 乗根は，極形式を用いると，次の例題のようにして求められる。

応用例題２） 方程式 $z^3=i$ を解け。

考え方 … 方程式を極形式で表して，両辺の絶対値と偏角を比較する。



解答　z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　…… ①

とすると与式の左辺は　$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$

また，与式の右辺 i を極形式で表すと　$i=0+1\cdot i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式 $z^3=i$ は　$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^3=1$，$3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$　(k は整数)

$r>0$ であるから　$r=1$　…… ②

また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4k\pi}{6}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2 であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$　…… ③

②，③ を ① に代入して，求める解は

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -i$$

ちゃんと解こうとすると

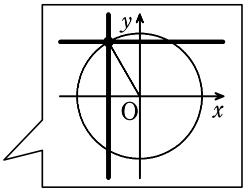
$0\leqq\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4k\pi}{6}<2\pi$

を解くことになるが

$0\leqq\theta<\dfrac{12}{6}\pi$

と見れば k は明らか

例題） 方程式 $z^4=8(-1+\sqrt{3}i)$ を解け。



解答　方程式の解 z の極形式を　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　…… ①

とすると与式の左辺は　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

与式の右辺を極形式で表すと　$8(-1+\sqrt{3}i)=8\cdot 2\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$=16\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると　$r^4=16$，$4\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$　(k は整数)

$r>0$ であるから　$r=2$　…… ②

また　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，$k=0$，1，2，3 であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$　…… ③

②，③ を ① に代入すると，求める解は

$$z=\sqrt{3}+i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}-i,\ 1-\sqrt{3}i$$

複素数平面【ド・モアブルの定理】　練習問題

練習１８） 次の式を計算せよ。

(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)^5$　　(2)　$(1+i)^8$　　(3)　$(1-\sqrt{3}\,i)^{-6}$

練習１９） 1の8乗根を求めよ。

複素数平面【ド・モアブルの定理】　練習問題

練習２０） 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

(1)　$z^2=i$　　(2)　$z^4=-4$　　(3)　$z^2=1+\sqrt{3}\,i$

複素数平面【ド・モアブルの定理】　練習問題

練習１８） 次の式を計算せよ。

(1)　$(1+\sqrt{3}\,i)^5$　　(2)　$(1+i)^8$　　(3)　$(1-\sqrt{3}\,i)^{-6}$

(解説)

(1)　$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$(1+\sqrt{3}\,i)^5=2^5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5$$

$$=32\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$=32\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16-16\sqrt{3}\,i$$

(2)　$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$(1+i)^8=(\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8$$

$$=16(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16$$

(3)　$1-\sqrt{3}\,i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ であるから

$$(1-\sqrt{3}\,i)^{-6}=2^{-6}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-6}$$

$$=\frac{1}{64}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\frac{1}{64}$$

複素数平面【ド・モアブルの定理】　練習問題

練習１９） 1の8乗根を求めよ。

解説

1の8乗根は

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{8}+i\sin\frac{2k\pi}{8}$$

$$=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$$

すなわち

$$z_0=1,\ z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ z_2=i,\ z_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ z_4=-1,$$

$$z_5=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ z_6=-i,\ z_7=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

1の8乗根は

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -i,\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

複素数平面【ド・モアブルの定理】　練習問題

練習２０） 次の方程式を解け。また，解を表す点を，それぞれ複素数平面上に図示せよ。

(1)　$z^2=i$　　(2)　$z^4=-4$　　(3)　$z^2=1+\sqrt{3}\,i$

(解説)

z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　……①　とする。

(1)　$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

また，i を極形式で表すと　$i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

よって，方程式は

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2=1,\ 2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=1$　……②

また　$\theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

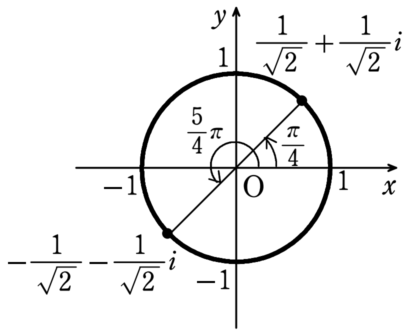
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0,\ 1$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\qquad\cdots\cdots③$$

②，③ を ① に代入して，求める解は

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

この解を複素数平面上に図示すると，右の図のようになる。



(2)　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

また，-4 を極形式で表すと　$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$

よって，方程式は

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=4,\ 4\theta=\pi+2k\pi\quad(k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=\sqrt{2}$　　……②

また $\qquad \theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

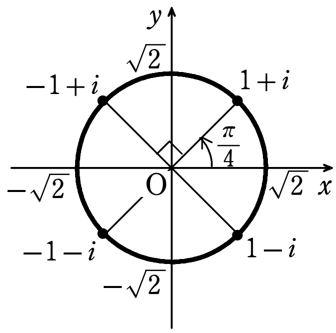
$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1，2，3 であるから

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ を ① に代入して，求める解は

$$z=1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$$

この解を複素数平面上に図示すると，右の図のようになる。



(3) $\qquad z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

また，$1+\sqrt{3}i$ を極形式で表すと $\qquad 1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって，方程式は

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2=2,\ 2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r>0$ であるから $\qquad r=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ②$

また $\qquad \theta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$k=0$，1 であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ を ① に代入して，求める解は

$$z=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

この解を複素数平面上に図示すると，右の図のようになる。