複素数平面【複素数と図形】 p.23～30

ここでは，複素数平面上で図形について考えてみよう。

□線分の内分点，外分点

2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を C(γ) とするとき，複素数 γ を求めてみよう。

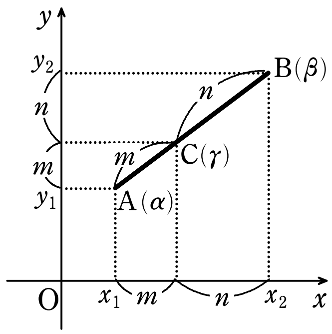
$$\alpha=x_1+y_1i,\ \beta=x_2+y_2i$$

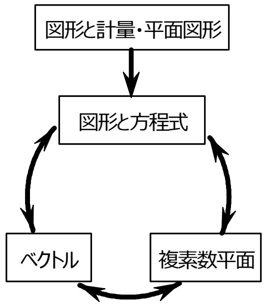
とすると，右の図からわかるように

$$\gamma=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}+\frac{ny_1+my_2}{m+n}i$$

である。よって

$$\gamma=\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$$





である。外分の場合も同様にして，次のことが成り立つ。

数Ⅱ図形と方程式
数Bベクトル
と同様に

内分点，外分点

2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を C(γ)，$m:n$ に外分する点を D(δ) とすると

内分点 $\boldsymbol{\gamma=\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}}$ 　外分点 $\delta=\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点を表す複素数は $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC について，

その重心を G(δ) とするとき，$\boldsymbol{\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$

例） 次の α，β について，2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を 3：2 に内分する点，外分する点を表す複素数を，それぞれ求めよ。

(1) $\alpha=2+4i$，$\beta=7-i$

内分点 $\dfrac{2(2+4i)+3(7-i)}{3+2}=\dfrac{4+8i+21-3i}{5}=\dfrac{25+5i}{5}=5+i$

外分点 $\dfrac{-2(2+4i)+3(7-i)}{3-2}=\dfrac{-4-8i+21-3i}{1}=17-11i$

(2) $\alpha=4-i$，$\beta=-2+3i$

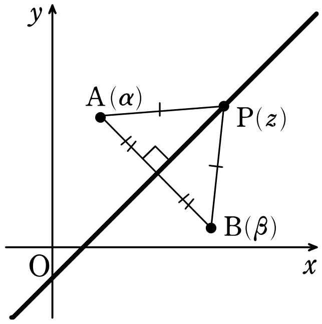
内分点 $\dfrac{2(4-i)+3(-2+3i)}{3+2}=\dfrac{8-2i-6+9i}{5}=\dfrac{2+7i}{5}$

外分点 $\dfrac{-2(4-i)+3(-2+3i)}{3-2}=\dfrac{-8+2i-6+9i}{1}=-14+11i$

複素数平面【複素数と図形】　p.23～30

□方程式の表す図形

□垂直二等分線



2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を P(z) とする。このとき

$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$$

図形と方程式 → ベクトル

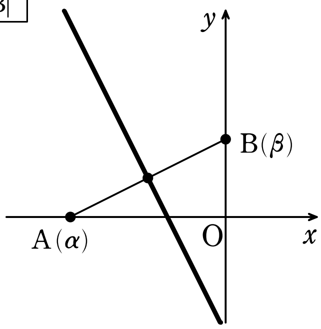
である。よって，次の方程式を満たす点 z 全体は，線分 AB の垂直二等分線である。

数Ｂベクトルと同様に
$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ と考えれば
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$$\boxed{|z-\alpha|=|z-\beta|}$$

複素数平面

例）　方程式 $|z+2|=|z-i|$ を満たす点 z は，
$|z-(-2)|=|z-i|$ となるので
2 点 A(-2)，B(i) から等距離にある点の全体で，
線分 AB の垂直二等分線である。㉑



□円

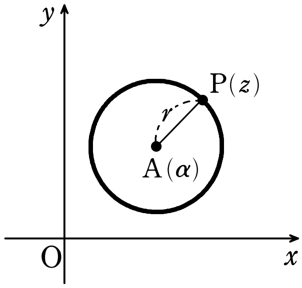
点 A(α) を中心とする半径 r の円上の点を P(z) とする。このとき

$$\mathrm{AP}=r$$

である。よって，次の方程式を満たす点 z 全体は，
点 A を中心とする半径 r の円である。

$$\boxed{|z-\alpha|=r}$$

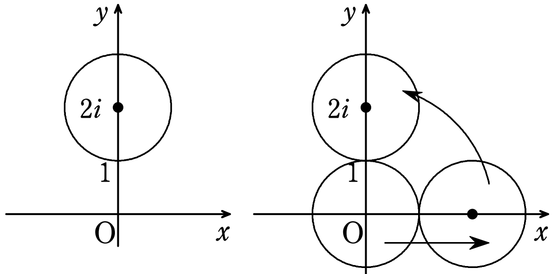
数Ｂベクトルと同様に
$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r$ と考えれば
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=r$



とくに，原点を中心とする半径 r の円は，方程式 $|z|=r$ で表される。

例題）　$w=i(z+2)$ とする。点 z が単位円上を動くとき，点 w はどのような図形をえがくか。

点 z が単位円上を動くから
$$|z|=1 \qquad \cdots\cdots ①$$
$w=i(z+2)$ を z について解くと
$$z=\frac{w}{i}-2=\frac{w-2i}{i}$$
これを①に代入して
$$\left|\frac{w-2i}{i}\right|=1$$
$$\frac{|w-2i|}{|i|}=1 \qquad \boxed{|i|=1}$$
$$|w-2i|=1$$
したがって，点 w は点 $2i$ を中心とする半径 1 の円をえがく



点 z が単位円上を動けば，
点 $z+2$ は点 2 を中心とする半径 1 の円
さらに i 倍すると $\dfrac{\pi}{2}$ の回転を与えることになる

複素数平面【複素数と図形】　p.23～30

応用例題３） $w=iz+2$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，

点 w はどのような図形を描くか。

考え方 … z を w の式で表して，$|z|=1$ であることを利用する。

解答　z は等式 $|z|=1$ を満たす。

$w=iz+2$ より $z=\dfrac{w-2}{i}$ であるから

$$|z|=\left|\frac{w-2}{i}\right|=\frac{|w-2|}{|i|}=|w-2|$$

$|i|=1$

よって　$|w-2|=1$

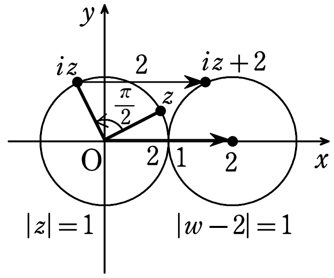
したがって，点 w は点 2 を中心とする半径 1 の円を描く。

応用例題 3 の $iz+2$ の図形的な意味は，

点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転し，

さらに原点を点 2 に移すような平行移動

をすることである。



□アポロニウスの円

例題６） 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

$$2|z|=|z+3|$$

$|z|^2=z\overline{z}$，$|z+3|^2=(z+3)\overline{(z+3)}$

解答　方程式の両辺を 2 乗すると　$4|z|^2=|z+3|^2$

よって　$4z\overline{z}=(z+3)\overline{(z+3)}$

$4z\overline{z}=(z+3)(\overline{z}+3)$　　$\overline{z+3}=\overline{z}+3$

右辺を展開して整理すると　$z\overline{z}-z-\overline{z}=3$

式を変形すると　$(z-1)(\overline{z}-1)=4$　すなわち　$|z-1|^2=2^2$

したがって　$|z-1|=2$

これは，点 1 を中心とする半径 2 の円である。

左辺に注目すると

$z\overline{z}-1\cdot z-1\cdot\overline{z}=3$

であるから

$(z-1)(\overline{z}-1)-1=3$

	$\overline{z}$	-1
z	$z\overline{z}$	$-z$
-1	$-\overline{z}$	$+1$

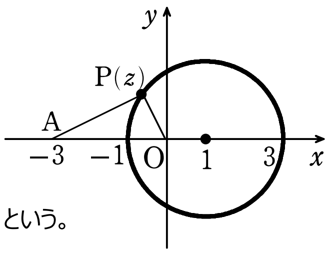
補足　例題 6 の円は，右の図のようになる。

原点 O と点 A(-3)，P(z) をとると，$2|z|=|z+3|$ は

$2\mathrm{OP}=\mathrm{AP}$　すなわち　OP：AP＝1：2 を表す。

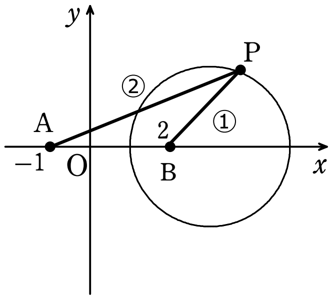
異なる 2 点からの距離の比が $m:n$ である点全体は

$m\neq n$ のとき，円を描く。このような円を **アポロニウスの円** という。



複素数平面【複素数と図形】 p.23～30

例題） 複素数平面で，2 点 A(-1)，B(2) からの距離の比が 2：1 である点 P(z) 全体の表す図形を求めよ。



条件より　AP：BP＝2：1　すなわち　AP＝2BP

よって　$|z+1|=2|z-2|$

両辺を 2 乗すると

$|z|^2=z\,\overline{z}$

$$|z+1|^2=2^2|z-2|^2$$

$$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$$

$$(z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$$

展開して整理すると

$$z\overline{z}+(z+\overline{z})+1=4\{z\overline{z}-2(z+\overline{z})+4\}$$

$$z\overline{z}+(z+\overline{z})+1=4z\overline{z}-8(z+\overline{z})+16$$

$$3z\overline{z}-9(z+\overline{z})+15=0$$

$$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+5=0$$

$z\,\overline{z}=|z|^2$

よって　$(z-3)(\overline{z}-3)-9+5=0$

$(z-3)(\overline{z}-3)=4$　より　$(z-3)\overline{(z-3)}=4$

$|z-3|^2=2^2$　したがって　$|z-3|=2$

これは中心が 3，半径 2 の円を表す

$z=a+bi$ として

大きさの計算から解く方法もある

（数Ⅱ図形と方程式として解く）

$|z+1|^2=2^2|z-2|^2$

$|a+bi+1|^2=4|a+bi-2|^2$

$|a+1+bi|^2=4|a-2+bi|^2$

$(a+1)^2+b^2=4\{(a-2)^2+b^2\}$

$3a^2-18a+3b^2+15=0$

$a^2-6a+b^2+5=0$

$(a-3)^2-9+b^2+5=0$

$(a-3)^2+b^2=4$

$\boxed{\text{別解}}$　$z=a+bi$ として大きさの計算から解く方法もある（数Ⅱ図形と方程式として解く）

$$|z+1|^2=2^2|z-2|^2$$

$$|a+bi+1|^2=4|a+bi-2|^2$$

$$|a+1+bi|^2=4|a-2+bi|^2$$

$$(a+1)^2+b^2=4\{(a-2)^2+b^2\}$$

$$3a^2-18a+3b^2+15=0$$

$$a^2-6a+b^2+5=0$$

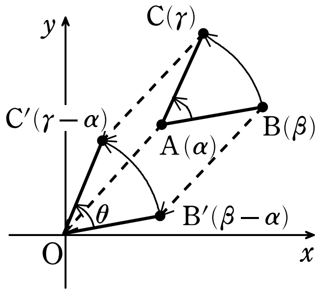
$$(a-3)^2-9+b^2+5=0$$

$$(a-3)^2+b^2=4$$

これは中心が 3，半径 2 の円を表す

複素数平面【複素数と図形】　p.23～30

□点 α を中心とする回転



2 点 A(α)，B(β) について，

点 B を点 A を中心として θ だけ回転した点を C(γ) とする。

このとき，γ を α，β で表すことを考えてみよう。

点 A を原点に移す平行移動によって，点 B，C が

それぞれ点 B′(β')，C′(γ') に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha,\quad \gamma'=\gamma-\alpha$$

である。点 C′ は，点 B′ を原点を中心として θ だけ回転した点であるから，

点 B′ を原点O を中心に角 θ だけ回転すると点 C′ に一致するので

$$\gamma'=(\cos\theta+i\sin\theta)\beta'$$ 　β' をθだけ回転させる

したがって

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$ 　$\beta'=\beta-\alpha$，$z'=z-\alpha$

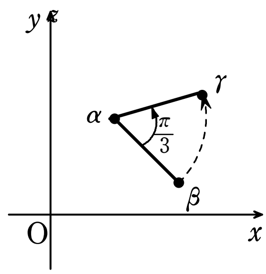
（ゆえに　$\gamma=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)+\alpha$）

点 α を中心とする回転

点 β を，点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ と

すると　$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$

例題７） $\alpha=2+3i$，$\beta=4+i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。



解答　$\alpha=2+3i$ が原点となるように考えると

点 $\beta-\alpha$ を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させると点 $\gamma-\alpha$ になるので

$\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$ であるから

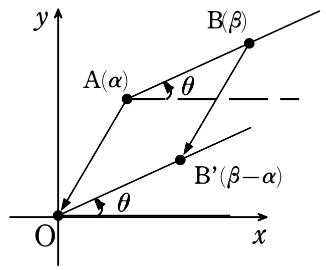
$$\gamma=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\{(4+i)-(2+3i)\}+(2+3i)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2-2i)+(2+3i)$$

$$=(3+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i$$

複素数平面【複素数と図形】　p.23～30

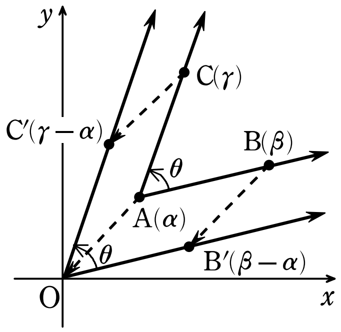
□半直線のなす角



　複素数平面上の異なる２点 A(α)，B(β) について，
半直線 AB が実軸の正の向きとなす角を θ とする。
ただし，角は向きを含めて考える。
　$-\alpha$ だけ平行移動すると，点A は原点に移り，
点B は点 B$'(\beta-\alpha)$ に移るから，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\theta=\arg(\beta-\alpha)}$$

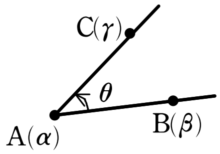
　異なる３点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して，点 A を中心として半直線 AB を半直線 AC の位置まで回転させたときの角 θ を，<u>半直線 AB から半直線 AC までの回転角</u>という。
ただし，θ は弧度法で表された一般角である。



　点 A を原点に移す平行移動によって，点 B，C は
それぞれ点 B$'(\beta-\alpha)$，C$'(\gamma-\alpha)$ に移る。
θ は半直線 OB$'$ から半直線 OC$'$ までの回転角に等しいから，
次が成り立つ。

$$\theta=\arg(\gamma-\alpha)-\arg(\beta-\alpha)=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

> **半直線のなす角**
>
> 　異なる３点 A(α)，B(β)，C(γ) に対して，
> 半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は
>
> $$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$



$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

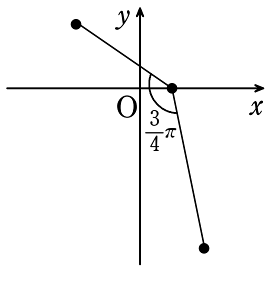
例９） ３点 A(1)，B$(-2+2i)$，C$(2-5i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの
回転角 θ を求める。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

$\alpha=1$，$\beta=-2+2i$，$\gamma=2-5i$ とすると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1-5i}{-3+2i}=\frac{(1-5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$$

$$=\frac{-3-2i+15i+10i^2}{9-4i^2}=\frac{-13+13i}{13}$$

$$=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$



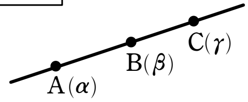
よって　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{3}{4}\pi$　　終

複素数平面【複素数と図形】　p.23～30

異なる3点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ に対して，

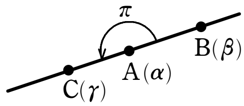
複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角

半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は $\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ である。



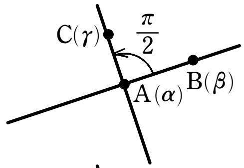
3点 A，B，C が一直線上にあるのは，θ が 0 または π のときであり，

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数である。

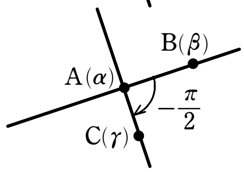


また，2直線 AB，AC が垂直に交わるのは，

θ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ のときであり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数である。



異なる3点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ について，次のことが成り立つ。



3点 A，B，C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **が実数**

2直線 AB，AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **が純虚数**

例題８改） 3点 $A(i)$，$B(2+2i)$，$C(x-i)$ について，A，B，Cが一直線上にあるときと，

2直線 AB，AC が垂直に交わるように，の実数 x の値をそれぞれ求めてみよう。

解答　$\dfrac{(x-i)-i}{(2+2i)-i}=\dfrac{x-2i}{2+i}$　　$\leftarrow \alpha=i$，$\beta=2+2i$，$\gamma=x-i$

$$=\frac{(x-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{2x-xi-4i+2i^2}{4-i^2}$$

$$=\frac{(2x-2)-(x+4)i}{5}$$

3点A，B，C が一直線上にあるのは $\dfrac{(2x-2)-(x+4)i}{5}$ が実数のとき

$\Rightarrow$　$2x-2\fallingdotseq 0$　かつ　$x+4=0$

よって　　$x=-4$

2直線AB，AC が垂直に交わるのは $\dfrac{(2x-2)-(x+4)i}{5}$ が純虚数のとき

$\Rightarrow$　$2x-2=0$　かつ　$x+4\fallingdotseq 0$

よって　　$x=1$

複素数平面【複素数と図形】　p.23〜30

応用例題４） 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC について，等式

$$\gamma=(1+\sqrt{3}\,i)\beta-\sqrt{3}\,i\alpha$$

が成り立つとき，次のものを求めよ。

(1) 複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値　(2) △ABC の 3 つの角の大きさ

考え方 … $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$の値から，2 辺の比 AB：AC，∠A の大きさを求める。

解答 (1) 等式から

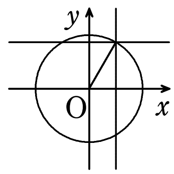
$$\gamma=(1+\sqrt{3}\,i)\beta-\alpha-\sqrt{3}\,i\alpha+\alpha$$
$$\gamma=(1+\sqrt{3}\,i)\beta-(1+\sqrt{3}\,i)\alpha+\alpha$$
$$\gamma-\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)(\beta-\alpha)$$

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}\,i$

(2) (1) より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}\,i$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$



$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=2$ から

$$2|\beta-\alpha|=|\gamma-\alpha|$$

2AB＝AC であるから

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=1:2$$

ベクトル的に考えれば

$2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$

$2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$

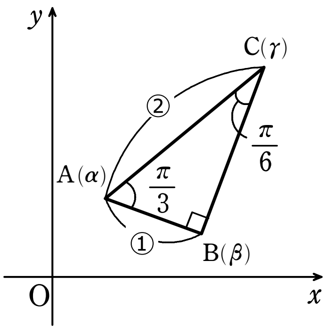
なので A 始点で考える

また，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{3}$ から

$$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$$

よって，△ABC は 図のような直角三角形で

$$\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{6}$$



研究 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC

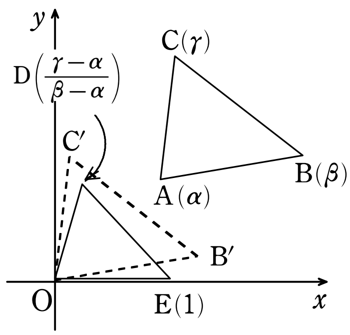
前ページでは，3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC について，
複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を用いて AB：AC および ∠A の大きさを調べた。
このことについて，もう少し詳しく調べてみよう。

一般に，次のことが成り立つ。

3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC があるとき，
原点 O と点 D$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$，E$(1)$ を頂点とする △OED を
考えると

△OED∽△ABC

である。



【証明】△OED と △ABC において

$$\mathrm{OE}:\mathrm{AB}=1:|\beta-\alpha|$$

$$\mathrm{OD}:\mathrm{AC}=\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|:|\gamma-\alpha|=\frac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}:|\gamma-\alpha|$$

$$=\frac{1}{|\beta-\alpha|}:1=1:|\beta-\alpha|$$

よって　OE：AB＝OD：AC

また，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を考えると　∠EOD＝∠BAC

2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△OED∽△ABC　終

上のことを用いて，△ABC の形状を調べることができる。

複素数平面【複素数と図形】　p.23～30

演習） z を複素数とし，i を虚数単位とする。

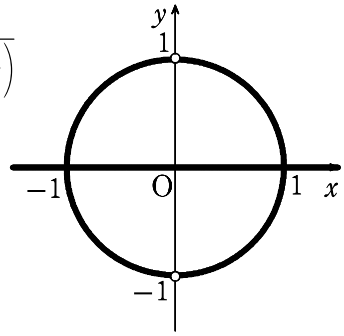
(1)　$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2)　z が (1) で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

解説

(1)　$z+i \neq 0$ かつ $z-i \neq 0$ から　$z \neq \pm i$

$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}=\dfrac{2z}{z^2+1}$　これが実数のとき　$\dfrac{2z}{z^2+1}=\overline{\left(\dfrac{2z}{z^2+1}\right)}$



$$\frac{2z}{z^2+1}=\overline{\left(\frac{2z}{z^2+1}\right)} \iff \frac{2z}{z^2+1}=\frac{2\overline{z}}{(\overline{z})^2+1}$$

$\iff z(|z|^2+1)=\overline{z}(|z|^2+1)$

$\iff z|z|^2+z=\overline{z}|z|^2+\overline{z}$

$\iff z|z|^2+z-\overline{z}|z|^2-\overline{z}=0$

$\iff (z-\overline{z})(|z|^2-1)=0$

$\iff z=\overline{z}$　または　$|z|=1$

$\iff z$ は実数　または　$|z|=1$　（ただし，$z \neq \pm i$）

よって，求める図形は右上の図のようになる。

ただし，点 i，$-i$ を除く。

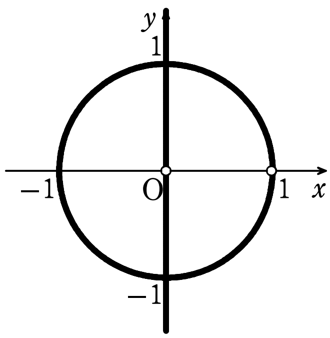
(2)　$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ から　　$w(z-i)=z+i$

すなわち　　$(w-1)z=(w+1)i$

$w=1$ はこれを満たさないから　　$w \neq 1$　　　よって　$z=\dfrac{w+1}{w-1}i$

[1]　$z=\overline{z}$ のとき

$z=\overline{z} \iff \dfrac{w+1}{w-1}i=\dfrac{\overline{w}+1}{\overline{w}-1}(-i)$



$\iff (w+1)(\overline{w}-1)+(\overline{w}+1)(w-1)=0$

$\iff |w|^2-w+\overline{w}-1+|w|^2-\overline{w}+w-1=0$

$\iff |w|=1$　（ただし，$w \neq 1$）

よって，点 w は点 O を中心とする半径 1 の円周上を動く。

ただし，点 1 を除く。

[2]　$|z|=1$ のとき

$z \neq \pm i$ から　　$w \neq 0$

$|z|=1 \iff \left|\dfrac{w+1}{w-1}i\right|=1 \iff |w+1|=|w-1|$

よって，点 w は 2 点 -1，1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸上を動く。

ただし，点 O を除く。

[1], [2] から，求める図形は右上の図のようになる。ただし，点 0，1 を除く。

（北海道大学2003）

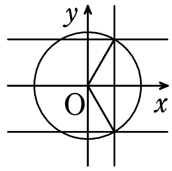
複素数平面【複素数と図形】 p.23～30

$\alpha\beta$ **を含む方程式を見たら** α^2 **で割って** $\dfrac{\beta}{\alpha}$ **の方程式に持っていく**のはセオリー。しっかり押さえておこう。

演習） α，β は等式 $\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ を満たす 0 でない複素数とする。

複素数平面上で，3 点 0，α，β を頂点とする三角形の 3 つの角の大きさを求めよ。

$\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

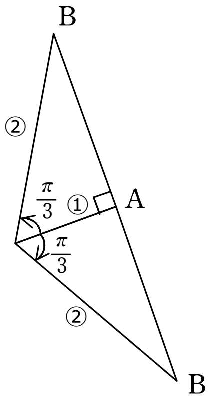


解答 等式の両辺を β^2 ($\neq 0$) で割ると $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}+4=0$

よって解の公式により $\dfrac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm\sqrt{3}\,i$

$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと $\dfrac{\alpha}{\beta}=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ 2\left\{\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right\}$

$$\frac{\alpha}{\beta}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$



O(0)，A(α)，B(β) とすると，

$$\left|\frac{\alpha-0}{\beta-0}\right|=2 \text{ なので } \frac{|\alpha-0|}{|\beta-0|}=2$$

すなわち $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=2$

したがって $\mathrm{OA}=2\mathrm{OB}$

また $\angle\mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\triangle\mathrm{OAB}$ は，点 B を直角の頂点とする三角形で

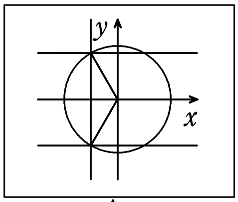
$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

演習) 原点 O とは異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ がある。次の等式が成り立つとき，

△OAB はどんな形の三角形か。

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$　　　　(2) $3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$



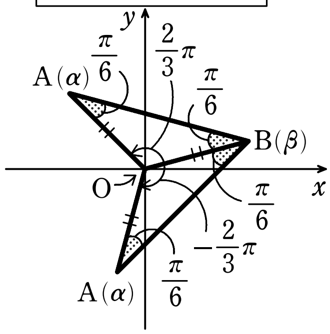
解答 (1) $\beta^2 \neq 0$ であるから，等式の両辺を β^2 で割ると

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\frac{\alpha}{\beta}+1=0$$

よって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)$$ (複号同順)



ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=1$

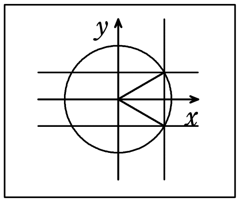
よって　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$

また，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　$\angle\mathrm{BOA}=\dfrac{2}{3}\pi$

したがって，△OAB は $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{O}=\dfrac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である。

(2) $\beta^2 \neq 0$ であるから，等式の両辺を β^2 で割ると

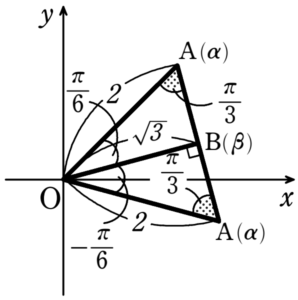
$$3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-6\cdot\frac{\alpha}{\beta}+4=0$$



よって　$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-3\cdot4}}{3}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{3}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$ (複号同順)



ゆえに　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=2:\sqrt{3}$

また，$\arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{\pi}{6}$ であるから　$\angle\mathrm{BOA}=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，△OAB は

$\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形である。

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習２１） A$(1+5i)$，B$(7-i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を $1:2$ に内分する点 C　　(2)　線分 AB の中点 M

(3)　線分 AB を $3:2$ に外分する点 D

練習２３） 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

(1)　$|z|=2$　　(2)　$|z-(1+i)|=1$　　(3)　$|z-2|=|z-4i|$

練習２４） 方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習２５） $w=i(z-2)$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか。

練習２６） $\alpha=1+i$，$\beta=5+3i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

練習２７） 3 点 A$(1-i)$，B$(2+i)$，C$(2i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習２８） 3 点 A$(-1+i)$，B$(3-i)$，C$(x+3i)$ について，次の問いに答えよ。ただし，x は実数とする。

(1)　2 直線 AB，AC が垂直に交わるように，x の値を定めよ。

(2)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，x の値を定めよ。

練習２９） 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC について，等式 $\gamma=(1-i)\alpha+i\beta$ が成り立つとき，次のものを求めよ。

(1)　複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値

(2)　△ABC の 3 つの角の大きさ

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習１） 3 点 $\mathrm{A}(-1+i)$，$\mathrm{B}(1-i)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か。

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

入試問題） 互いに異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に，等式
$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=8(\beta^3-3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2-\gamma^3)$ が成り立つとする。

(1) $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ の値を求めよ。

(2) 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ が一直線上にないとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような形の三角形か。

【神戸大学】

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習２１） A$(1+5i)$，B$(7-i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 1：2 に内分する点 C　　(2)　線分 AB の中点 M

(3)　線分 AB を 3：2 に外分する点 D

(解説)

(1)　$\dfrac{2(1+5i)+1\cdot(7-i)}{1+2}=\dfrac{9+9i}{3}=3+3i$

(2)　$\dfrac{(1+5i)+(7-i)}{2}=\dfrac{8+4i}{2}=4+2i$

(3)　$\dfrac{-2(1+5i)+3(7-i)}{3-2}=19-13i$

練習２３） 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

(1)　$|z|=2$　　(2)　$|z-(1+i)|=1$　　(3)　$|z-2|=|z-4i|$

(解説)

(1)　原点を中心とする半径 2 の円

(2)　点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円

(3)　2 点 A(2)，B$(4i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線

練習２４） 方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

(解説)

方程式の両辺を 2 乗すると　　$4|z-3|^2=|z|^2$

よって　　$4(z-3)(\overline{z-3})=z\overline{z}$

　　　　$4(z-3)(\overline{z}-3)=z\overline{z}$

左辺を展開して整理すると　　$z\overline{z}-4z-4\overline{z}+12=0$

式を変形すると　　$(z-4)(\overline{z}-4)=4$　すなわち　$|z-4|^2=4$

したがって　　$|z-4|=2$

これは，点 4 を中心とする半径 2 の円である。

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習２５） $w=i(z-2)$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 w はどのような図形を描くか。

(解説)

z は等式 $|z|=1$ を満たす。

$w=i(z-2)$ より $z=\dfrac{w+2i}{i}$ であるから

$$|z|=\left|\frac{w+2i}{i}\right|=\frac{|w+2i|}{|i|}=|w+2i|$$

よって　　$|w+2i|=1$

したがって，点 w は点 $-2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

練習２６） $\alpha=1+i$，$\beta=5+3i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(解説)

$\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)(\beta-\alpha)$ であるから

$$\begin{aligned}\gamma&=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\{(5+3i)-(1+i)\}+(1+i)\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4+2i)+(1+i)\\&=2\sqrt{3}+(\sqrt{3}+3)i\end{aligned}$$

練習２７） 3 点 A$(1-i)$，B$(2+i)$，C$(2i)$ に対して，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし，$-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(解説)

$\alpha=1-i$，$\beta=2+i$，$\gamma=2i$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}&=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1+i\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

よって　　$\theta=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{4}$

複素数平面【複素数と図形】　練習問題

練習２８） 3 点 A$(-1+i)$，B$(3-i)$，C$(x+3i)$ について，次の問いに答えよ。ただし，x は実数とする。

(1)　2 直線 AB，AC が垂直に交わるように，x の値を定めよ。

(2)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，x の値を定めよ。

(解説)

$$\frac{(x+3i)-(-1+i)}{(3-i)-(-1+i)}=\frac{(x+1)+2i}{4-2i}$$

$$=\frac{\{(x+1)+2i\}(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$$

$$=\frac{2x+(x+5)i}{10}\quad\cdots\cdots ①$$

(1)　2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは，① が純虚数のときであるから

$2x=0$　かつ　$x+5\neq 0$

よって　$x=0$

(2)　3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，① が実数のときであるから

$x+5=0$

よって　$x=-5$

練習２９） 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC について，等式 $\gamma=(1-i)\alpha+i\beta$ が成り立つとき，次のものを求めよ。

(1)　複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値　　(2)　△ABC の 3 つの角の大きさ

(解説)

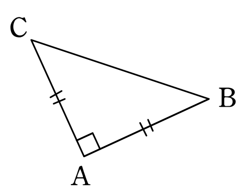
(1)　等式から　$\gamma-\alpha=i(\beta-\alpha)$

よって　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=i$

(2)　(1) より，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ であるから　$|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$

よって　AB$=$AC

また，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数であるから，2 直線 AB，AC は垂直に交わり　$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$



したがって，△ABC は図のような直角二等辺三角形で

$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{4}$

複素数平面【複素数と図形】 練習問題

練習 1） 3 点 A$(-1+i)$，B$(1-i)$，C$(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ を頂点とする △ABC はどのような三角形か。

(解説)

$\alpha=-1+i$，$\beta=1-i$，$\gamma=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ とする。

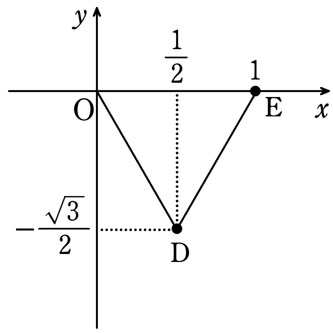
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i}{2(1-i)}=\frac{\{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i\}(1+i)}{2(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

原点 O と点 D$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$，点 E$(1)$ を頂点とする △OED を考えると，△OED∽△ABC である。

右の図より，△OED は正三角形である。

よって，△ABC は正三角形である。



複素数平面【複素数と図形】 練習問題

入試問題） 互いに異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に，等式

$\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=8(\beta^3-3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2-\gamma^3)$ が成り立つとする。

(1) $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ の値を求めよ。

(2) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) が一直線上にないとき，△ABC はどのような形の三角形か。

【神戸大学】

(解説)

(1) 等式の両辺を変形すると　$(\alpha-\beta)^3=8(\beta-\gamma)^3$　すなわち　$(\alpha-\beta)^3=-8(\gamma-\beta)^3$

$\beta \fallingdotseq \gamma$ であるから　$\left(\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)^3=-8$

$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=z$ とおくと　$z^3=-8$　ゆえに　$z^3+8=0$

よって　$(z+2)(z^2-2z+4)=0$　これを解いて　$z=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

したがって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2) 3 点 A，B，C が一直線上にないことから，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ は実数ではない。

ゆえに　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=1\pm\sqrt{3}i$

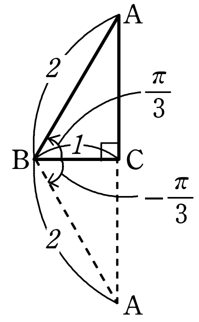
極形式で表すと　$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=2\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$　(複号同順)

よって　$\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right|=\dfrac{|\alpha-\beta|}{|\gamma-\beta|}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=2$

ゆえに　BA : BC $=2:1$

また，$\arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}=\pm\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$\angle\mathrm{CBA}=\dfrac{\pi}{3}$



よって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形

である。