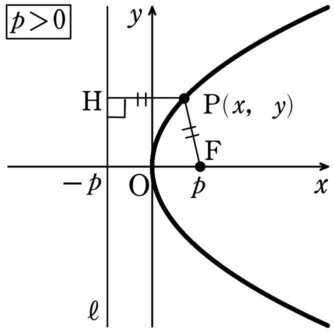
式と曲線【２次曲線：放物線】　p.34～46

□放物線

平面上で，定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡を **放物線** といい，この点 F を放物線の **焦点**，直線 ℓ を放物線の **準線** という。

点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ を焦点とし，直線 $x=-p$ を準線 ℓ とする放物線の方程式を求めてみよう。ただし，$p\fallingdotseq 0$ とする。



この放物線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，P から ℓ に下ろした垂線を PH とすると，P がこの放物線上にあるのは，

$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ すなわち $\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2$ のときである。

よって　$(x-p)^2+y^2=\{x-(-p)\}^2$

整理して　　$y^2=4px$　…… ①

逆に，① を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は $\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ を満たす。

① を放物線の方程式の **標準形** という。また，放物線の焦点を通り，準線に垂直な直線を，放物線の **軸** といい，軸と放物線の交点を，放物線の **頂点** という。放物線は，その軸に関して対称である。

４をくくり出すのを忘れずに

放物線の標準形　$y^2=4px$　$(p\fallingdotseq 0)$

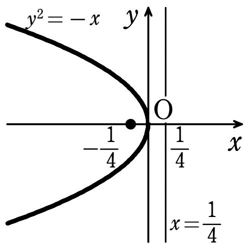
1　**焦点は　点** $(p,\ 0)$，**準線は　直線** $x=-p$

2　軸は x 軸，頂点は原点 O

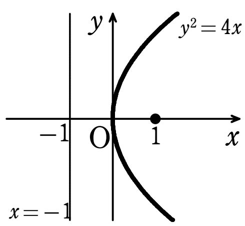
3　曲線は x 軸に関して対称

例１）　放物線 $y^2=-x$ について，

$y^2=4\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)x$ であるから，焦点は　点 $\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ で，準線は直線 $x=\dfrac{1}{4}$ である。終

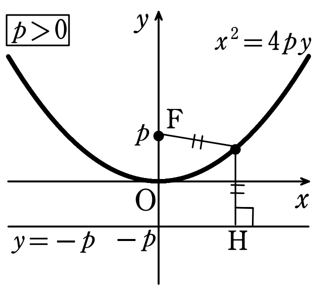


例２） 焦点が点 $(1,\ 0)$ で，
準線が直線 $x=-1$
である放物線の方程式は
$y^2=4\cdot 1\cdot x$　すなわち　$y^2=4x$　　終



□y 軸が軸となる放物線

$p\fallingdotseq 0$ とする。点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点とし，直線 $y=-p$ を準線とする放物線の方程式は，前ページと同様にして求めると，次のようになる。



４をくくり出すのを忘れずに
$y=$　にすればいつもの形

$x^2=4py$

放物線 $y=ax^2$ は，$x^2=4\cdot\dfrac{1}{4a}y$ と表されるから，

その焦点は点 $\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$，準線は直線 $y=-\dfrac{1}{4a}$ である。

式と曲線【２次曲線：楕円】 p.34～46

□楕円

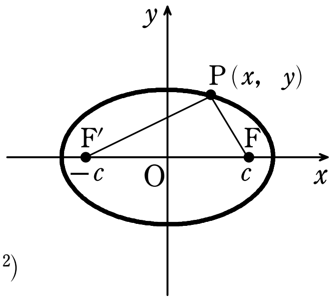
平面上で，2 定点 F，F′ からの**距離の和**が一定である点の軌跡を **楕円** といい，
この 2 点 F，F′ を楕円の **焦点** という。

---

2 点 F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式を求めてみよう。ただし，$\mathrm{FF'}<2a$ であることが必要なので，$a>c>0$ とする。

この楕円上の点を P$(x,\ y)$ とすると，P が楕円上にあるのは

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ のときであるから



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると $\quad a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$

再び両辺を 2 乗して整理すると $\quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

$a>c$ であるから，$\sqrt{a^2-c^2}=b$ とおくと，$a>b>0$ であり $\quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

両辺を a^2b^2 で割る。

よって $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots$ ①

逆に，① を満たす点 P$(x,\ y)$ は $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ を満たす。

① を楕円の方程式の **標準形** という。

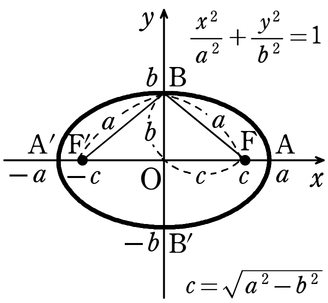
① を導くのに $\sqrt{a^2-c^2}=b$ とおいたから，$c=\sqrt{a^2-b^2}$ である。

このことから，楕円 ① の焦点 F，F′ の座標は，次のようになる。

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$$

---

2 点 F，F′ を焦点とする楕円において，線分 FF′ の中点を楕円の **中心** という。直線 FF′ と楕円の交点を A，A′，中心を通り直線 FF′ と垂直な直線と楕円の交点を B，B′ とするとき，線分 AA′ を **長軸**，線分 BB′ を **短軸** という。**焦点は長軸上にある**。また，楕円 ① と x 軸および y 軸の交点 A，A′，B，B′ を楕円の **頂点** という。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，



頂点は 4 点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，$(0,\ b)$，$(0,\ -b)$ で，中心は原点 O である。

楕円は，長軸，短軸，中心に関して対称である。

楕円の標準形 $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

1　焦点は　2 点 $\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$

2　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は　$2a$　($\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$)

3　長軸の長さは　$2a$，　短軸の長さは　$2b$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

式と曲線【２次曲線：楕円】　p.34～46

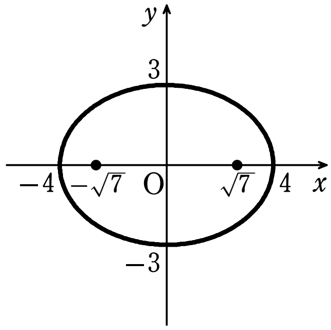
例３）　楕円 $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

焦点は，$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$ より

2 点 $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot4=8$

短軸の長さは　$2\cdot3=6$　終



例題１）　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，

焦点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めよ。

解答　求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

焦点からの距離の和について，$2a=10$ であるから　$a=5$，$a^2=25$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=3$ であるから

$$b^2=a^2-3^2=25-9=16$$

この場合 b を求める必要はない

よって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

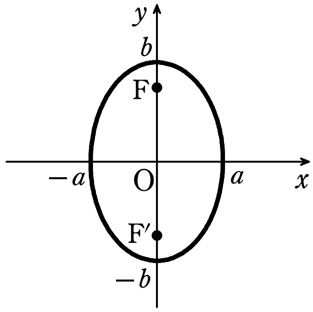
□焦点が y 軸上にある楕円

方程式　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……①

において，$b>a>0$ の場合，① は右の図のような楕円を表す。

この楕円の 2 つの焦点 F，F′ は y 軸上にあり，

座標は次のようになる。



> **$\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)$，$\mathrm{F}'\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right)$**
>
> この楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2b$ である。
>
> また，長軸は y 軸上，短軸は x 軸上にある。
>
> 長軸の長さは $2b$，短軸の長さは $2a$ である。

式と曲線【２次曲線：楕円】　p.34～46

□円と楕円

円 $x^2+y^2=r^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に縮小または拡大すると，どのような曲線になるか調べてみよう。

例題１） 円 $x^2+y^2=4^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍して得られる図形（曲線の方程式）を求める。

軌跡を求める点は (x, y)

円上に点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$s^2+t^2=4^2$ ……①　　Qは円周上の点

$x=s,\ y=\dfrac{3}{4}t$ ……②　　y 軸方向に $\dfrac{3}{4}$ 倍

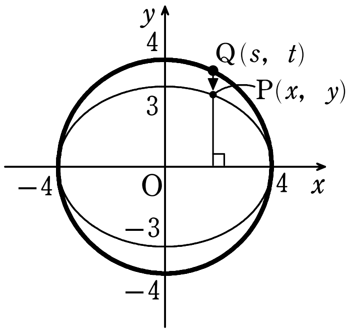
② より

$s=x,\ t=\dfrac{4}{3}y$ ……③

③ を ① に代入すると

$x^2+\left(\dfrac{4}{3}y\right)^2=4^2$

すなわち　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$　終



一般に，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，

円 $x^2+y^2=a^2$ を，x 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である。

補足　円は楕円の特別な場合であると考えることができる。

式と曲線【２次曲線：楕円】 p.34～46

□点の軌跡が楕円になる場合

応用例題１） 座標平面上において，長さが５の線分 AB の端点 A は x 軸上を，
端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を２：３に内分する点 P の軌跡を求めよ。

考え方 … 動点を $\mathrm{A}(s,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ t)$，連動点（軌跡を求める点）を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として
s，t を x，y で表し，s，t の満たす式に代入する。

解答　点 A の座標を $(s,\ 0)$，点 B の座標を $(0,\ t)$ とすると，AB＝5 から

$$s^2+t^2=5^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P は線分 AB を２：３に内分する

から　$x=\dfrac{3}{5}s$，$y=\dfrac{2}{5}t$

図からも比率を確認してみよう

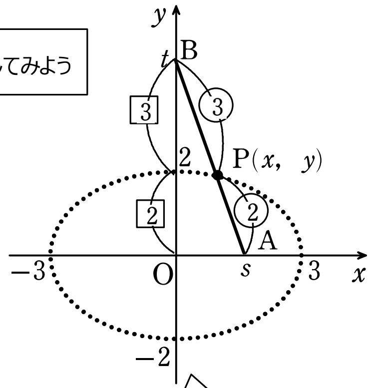
すなわち　$s=\dfrac{5}{3}x$，$t=\dfrac{5}{2}y$

これらを ① に代入すると

$$\left(\frac{5}{3}x\right)^2+\left(\frac{5}{2}y\right)^2=5^2$$

すなわち　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

よって，点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上にある。



$s=0$ のときや
$t=0$ など極端なところを
考えると概形がわかる

逆に，この楕円上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

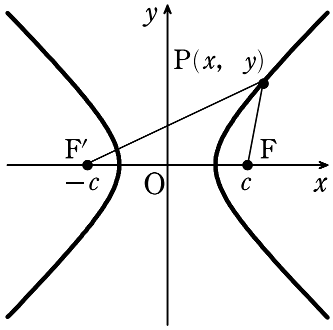
したがって，求める軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ である。

軌跡の問題は
逆についても触れておく
（必要条件・十分条件
どちらも成り立つことを確認する）

□双曲線の方程式

平面上で，2 定点 F，F′ からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡を **双曲線** といい，この 2 点 F，F′ を双曲線の 焦点 という。ただし，焦点 F，F′ からの距離の差は，線分 FF′ の長さより小さいものとする。

2 点 F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式を求めてみよう。ただし，$\mathrm{FF'}>2a$ であることが必要なので，$c>a>0$ とする。



この双曲線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，P が双曲線上にあるのは

$\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}=\pm 2a$ のときであるから

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

再び両辺を 2 乗して整理すると

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$c>a$ であるから，$\sqrt{c^2-a^2}=b$ とおくと，$b>0$ であり

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

上の式の両辺を a^2b^2 で割る

よって　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…… ①

逆に，① を満たす点 P$(x,\ y)$ は，$b=\sqrt{c^2-a^2}$ のとき，$\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}=\pm 2a$ を満たす。

① を双曲線の方程式の **標準形** という。

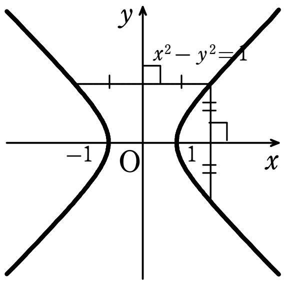
① を導くのに $\sqrt{c^2-a^2}=b$ とおいたから，$c=\sqrt{a^2+b^2}$ である。

このことから，双曲線 ① の**焦点** F，F′ の座標は，次のようになる。

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right),\ \mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$$

ここで，2 直線 $y=x$，$y=-x$ が

双曲線 $x^2-y^2=1$ …… ① の**漸近線**であることを示そう。



双曲線　$x^2-y^2=1$　…… ①

の概形は，右の図のようになり，x 軸，y軸に関して対称である。

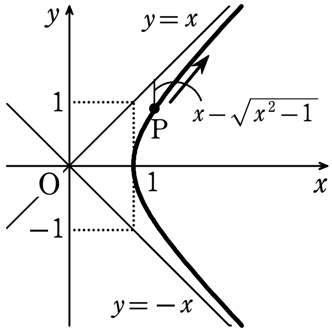
双曲線 ① の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分は，関数

$$y=\sqrt{x^2-1}\quad (x \geqq 1)\quad \cdots\cdots ②$$

のグラフである。$x \geqq 1$ においては

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}>0$$

であり，② のグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点から限りなく遠ざかると，x は限りなく大きくなる。このとき，$x+\sqrt{x^2-1}$ も限りなく大きくなるから，$\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ は 0 に限りなく近づく。



したがって， x と $\sqrt{x^2-1}$ の差は 0 に限りなく近づく。
よって，② のグラフ上の点 P は，原点から限りなく遠ざかるとき，直線 $y=x$ に限りなく近づく。
すなわち，直線 $y=x$ は，双曲線 ① の漸近線である。

また，② のグラフと直線 $y=x$ を x 軸に関して折り返すことにより，直線 $y=-x$ も双曲線 ① の漸近線であることがわかる。

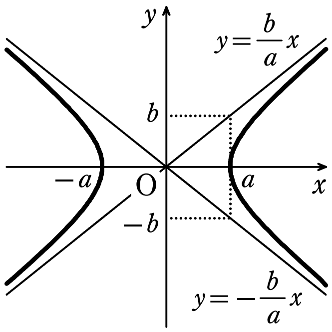
さらに，双曲線 ① は y 軸に関して対称であるから，$x\leqq 0$ の部分についても，2 直線 $y=x$，$y=-x$ は漸近線であることがわかる。

一般の双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の概形は，右の図のようになる。

上と同様に，関数　$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$　$(x\geqq a)$

のグラフなどを考えると，次の 2 直線が漸近線であることがわかる。

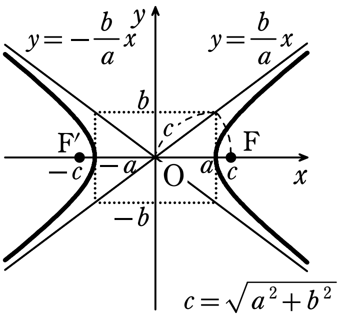
$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$$



双曲線の焦点 F，F′ を通る直線 FF′ と双曲線の交点を，双曲線の **頂点** という。また，線分 FF′ の中点を，双曲線の **中心** という。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，

頂点は 2 点 $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$ で，中心は原点 O である。
また，この双曲線は，x 軸，y 軸，原点 O に関して対称である。



双曲線の標準形　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$

1　**焦点は　2 点** $\boldsymbol{\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)}$

2　双曲線上の点から 2 つの焦点までの<u>距離の差</u>は　$\boldsymbol{2a}$

3　**漸近線は　2 直線** $\boldsymbol{y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x}$

4　曲線は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称

＜補足＞　2 本の漸近線の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0$，$\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0$ と表すことができる。

式と曲線【２次曲線：双曲線】 p.34～46

例５） 双曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$

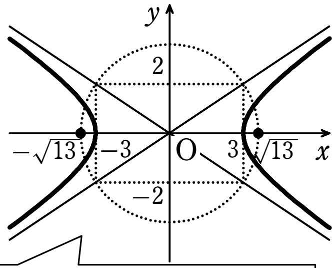
焦点は，$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ より

2 点 $(\sqrt{13},\ 0)$，$(-\sqrt{13},\ 0)$

頂点は　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

漸近線は

2 直線 $y=\dfrac{2}{3}x$，$y=-\dfrac{2}{3}x$ 終



分母の値を用いて

長方形と円を補うと

焦点，頂点，漸近線が見えてくる

例題２） 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，

焦点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を求めよ。

解答　求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおける。

焦点からの距離の差について，$2a=6$ であるから

$$a=3,\quad a^2=9$$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2+b^2}=4$ であるから

$$b^2=4^2-a^2=16-9=7$$

この場合 b を求める必要はない

よって，求める双曲線の方程式は

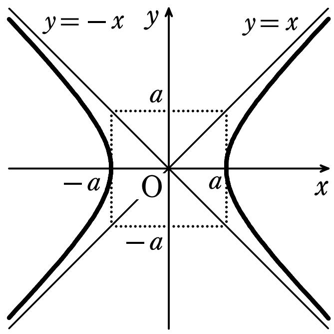
$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$$

一般に，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ の漸近線は

2 直線 $y=x$，$y=-x$ であり，これらは直角に交わる。

このように，直角に交わる漸近線をもつ双曲線を

直角双曲線 という。



双曲線 $xy=1$ （ $y=\dfrac{1}{x}$ ）は直角双曲線 $x^2-y^2=2$ を

原点を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転したものになっていることが

わかるから，双曲線 $xy=1$ は直角双曲線であるといえる (p.11研究)

例） 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

解答　直角双曲線なので $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ （ $a>0$ ）とおくと

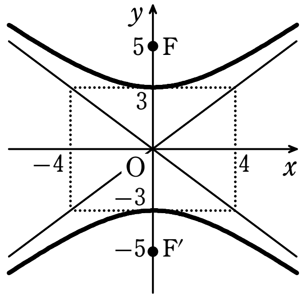
焦点の x 座標より $\sqrt{a^2+a^2}=4$

両辺を２乗して　$2a^2=16$　$\therefore$　$a^2=8$　$a>0$ より　$a=2\sqrt{2}$

したがって　$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$

式と曲線【２次曲線：双曲線】　p.34～46

□焦点が y 軸上にある双曲線



次の方程式の表す曲線について調べてみよう。

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1 \quad \cdots\cdots ①$$

① より　$\dfrac{y^2}{3^2}-\dfrac{x^2}{4^2}=1$

よって，① は，$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ において，x と y を入れかえたものである。

このことから，曲線 ① は右の図のような双曲線であるといえる。

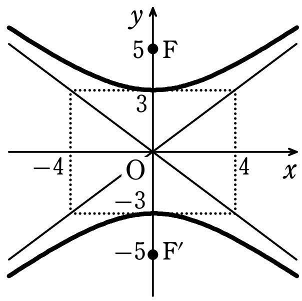
２つの焦点 F，F′ および頂点は y 軸上にあり，次のようになる。

焦点は　F$(0,\ 5)$，F′$(0,\ -5)$，　頂点は　２点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

また，漸近線は２直線 $y=\dfrac{3}{4}x$，$y=-\dfrac{3}{4}x$ である。

符号に注目！

一般に，$a>0$，$b>0$ のとき，方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\boxed{-1}$ の表す曲線も双曲線である。この双曲線について，次のことがいえる。



焦点は　２点 $\left(0,\ \sqrt{a^2+b^2}\right)$，$\left(0,\ -\sqrt{a^2+b^2}\right)$
頂点は　２点 $(0,\ b)$，$(0,\ -b)$
漸近線は　２直線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$
双曲線上の点から２つの焦点までの距離の差は　$2b$

例） 次の双曲線の頂点と焦点および漸近線を求め，その概形をかけ。

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$$

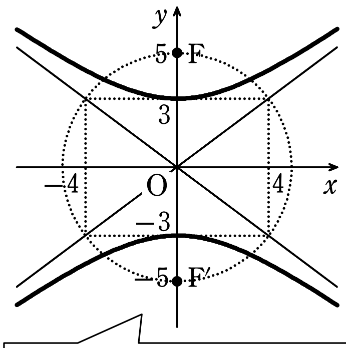
$\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=-1$　より

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ であるから

頂点　$(0,3)$，$(0,-3)$

焦点　$(0,5)$，$(0,-5)$

漸近線　$y=\pm\dfrac{3}{4}x$



長方形と円を補うと
焦点，頂点，漸近線が見えてくる

これまでに学んだ放物線，楕円，双曲線と円は，x，y の２次方程式で表される。

これらの曲線をまとめて　**２次曲線**　という。

式と曲線【２次曲線：双曲線】　p.34～46

研究　直角双曲線 $xy=1$

２定点 F，F′ からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡は双曲線である。
直線 $y=x$ 上の２点 $\mathrm{F}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$\mathrm{F'}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ からの距離の差が $2\sqrt{2}$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めてみよう。

$\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}=\pm2\sqrt{2}$ であるから，次の等式が成り立つ。

$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}-\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=\pm2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2}=\pm2\sqrt{2}+\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}$$

両辺を２乗して整理すると

$$(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=8\pm4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}+(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2$$

$$\pm4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=8+(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2-(x-\sqrt{2})^2-(y-\sqrt{2})^2$$

$$\pm4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=8+4\sqrt{2}\,x+4\sqrt{2}\,y$$

$$\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=2+\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y$$

両辺を２乗して整理すると

$$2\{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2\}=4+2x^2+2y^2+4\sqrt{2}\,x+4xy+4\sqrt{2}\,y$$

$$(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=2+x^2+y^2+2\sqrt{2}\,x+2xy+2\sqrt{2}\,y$$

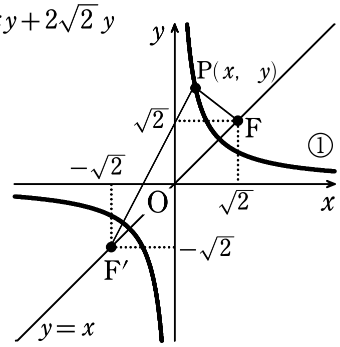
$$x^2+2\sqrt{2}\,x+2+y^2+2\sqrt{2}\,y+2=2+x^2+y^2+2\sqrt{2}\,x+2xy+2\sqrt{2}\,y$$

整理すると，$xy=1$ が得られる。

このことから

$$xy=1\quad すなわち\quad y=\frac{1}{x}\quad \cdots\cdots ①$$

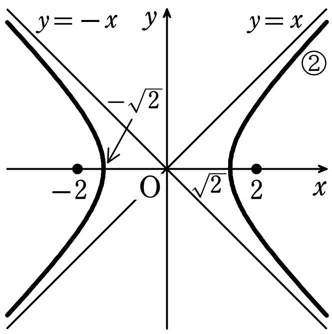
のグラフは，２点 F，F′ を焦点とする双曲線であることがわかる。



一方，直角双曲線

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1\qquad \cdots\cdots ②$$

は，２つの焦点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ からの距離の差が $2\sqrt{2}$ となる点の軌跡である。

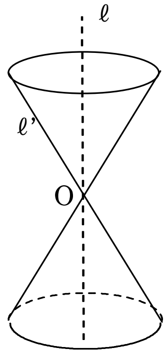


双曲線 ①，② は，ともに焦点間の距離が 4 で等しい。
また，ともに曲線上の点から２つの焦点までの距離の差が $2\sqrt{2}$ となる点の軌跡である。

よって，曲線 ①，② の形は同じで，① は直角双曲線である。
曲線 ② を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転すると曲線 ① に重なる。

Column

円錐曲線



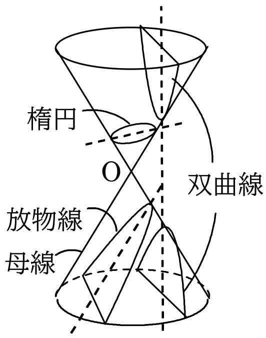
１つの直線 ℓ と１点 O で交わる直線 ℓ’ が ℓ のまわりに空間内で回転するとき， ℓ’ のえがく面を円錐面といいます。

ℓ をその円錐面の **軸** ，O を **頂点** ， ℓ’ を **母線** といいます。

円錐面は頂点によって２つの部分に分けられます。
頂点を通らない平面 α で円錐面を切るとき，その切り口は α と円錐面の交わり方によって，次のような曲線となります。

円錐をその頂点 O を通らない平面 α で切った切り口の曲線は，

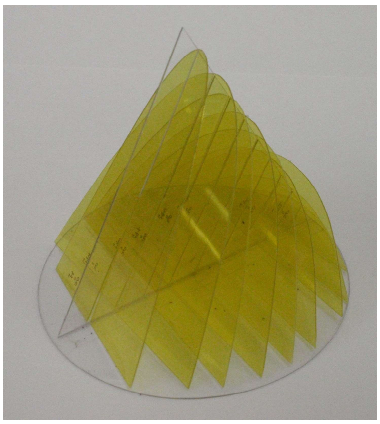
α が母線に平行であるとき，放物線
α が母線に平行でなく，
円錐の一方とだけ交わるとき，円または楕円
α が母線に平行でなく，両方の円錐と交わるとき，双曲線



となります。

このように，2 次曲線は，円錐を平面で切った切り口の曲線であることが知られています。

このことから，これらの 2 次曲線を **円錐曲線** ともいいます。



式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習１） 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2=-4x$　　(3)　$y^2=x$

練習２） 焦点が点 $(-2,\ 0)$ で，準線が直線 $x=2$ である放物線の方程式を求めよ。

練習３） 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$x^2=4y$　　　　(2)　$y=-2x^2$

練習４） 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$　　　　(3)　$x^2+16y^2=16$

練習５） 2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を求めよ。

練習６） 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　　　(2)　$x^2+\dfrac{y^2}{25}=1$

練習７） 円 $x^2+y^2=3^2$ を，x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ。

(1)　y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍

(2)　y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

練習８） 座標平面上において，長さが 7 の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を $3:4$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

練習９） 次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$　　(2) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(3) $x^2-9y^2=9$

練習１０） 2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

練習１１） 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習１２） 次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$　　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$

式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習１） 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$y^2=8x$　　(2)　$y^2=-4x$　　(3)　$y^2=x$

(解説)

(1)　$y^2=4\cdot 2\cdot x$

放物線は図のようになる。

焦点は点 $(2,\ 0)$ で，準線は直線 $x=-2$ である。

(2)　$y^2=4\cdot(-1)x$

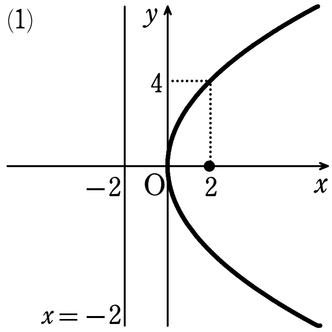
放物線は図のようになる。

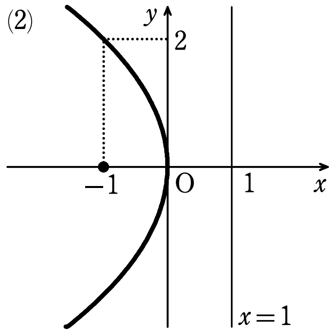
焦点は点 $(-1,\ 0)$ で，準線は直線 $x=1$ である。

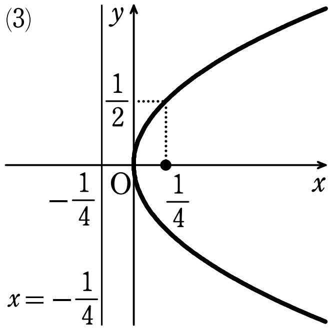
(3)　$y^2=4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot x$

放物線は図のようになる。

焦点は点 $\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ で，準線は直線 $x=-\dfrac{1}{4}$ である。







練習２） 焦点が点 $(-2,\ 0)$ で，準線が直線 $x=2$ である放物線の方程式を求めよ。

(解説)

$y^2=4\cdot(-2)x$　すなわち　$y^2=-8x$

式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習３） 次の放物線の概形をかけ。また，その焦点と準線を求めよ。

(1)　$x^2=4y$　　　　(2)　$y=-2x^2$

(解説)

(1)　$x^2=4\cdot1\cdot y$

放物線は図のようになる。焦点は点 $(0,\ 1)$ で，準線は直線 $y=-1$ である。

(2)　$y=-2x^2$ より　　$x^2=-\dfrac{1}{2}y$　すなわち　$x^2=4\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)y$

放物線は図のようになる。焦点は点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{8}\right)$ で，準線は直線 $y=\dfrac{1}{8}$ である。

練習４） 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$　　(3)　$x^2+16y^2=16$

(解説)

(1)　楕円は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$ より

2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot5=10$

短軸の長さは　$2\cdot3=6$

(2)　与えられた方程式を変形すると

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

楕円は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{9-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ より

2 点 $(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot3=6$

短軸の長さは　$2\cdot1=2$

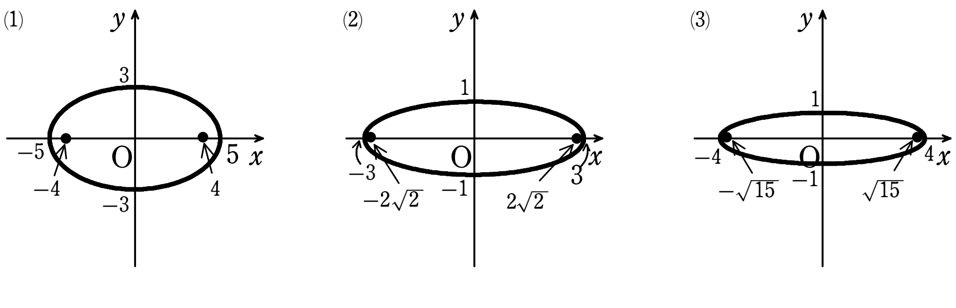
(3)　与えられた方程式を変形すると

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

楕円は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ より　　2 点 $(\sqrt{15},\ 0)$，$(-\sqrt{15},\ 0)$

長軸の長さは　$2\cdot4=8$　短軸の長さは　$2\cdot1=2$



式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習５） 2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を求めよ。

(解説)

求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

焦点からの距離の和について，$2a=4$ であるから

$$a=2,\quad a^2=4$$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ であるから

$$b^2=a^2-(\sqrt{3})^2=4-3=1$$

よって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

練習６） 次の楕円の概形をかけ。また，その焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$　　　(2) $x^2+\dfrac{y^2}{25}=1$

(解説)

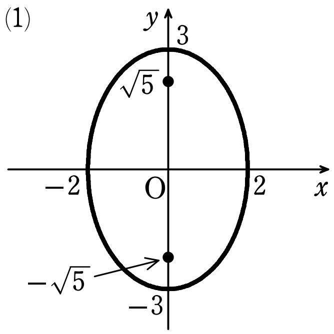
(1)　楕円は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ より

$$2\text{ 点 }(0,\ \sqrt{5}),\ (0,\ -\sqrt{5})$$

長軸の長さは　$2\cdot3=6$

短軸の長さは　$2\cdot2=4$



(2)　与えられた方程式を変形すると

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

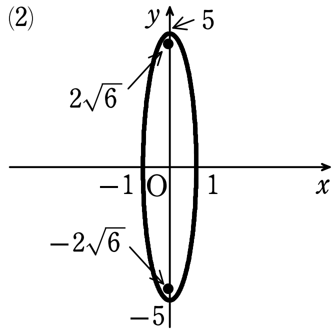
楕円は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{25-1}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ より

$$2\text{ 点 }(0,\ 2\sqrt{6}),\ (0,\ -2\sqrt{6})$$

長軸の長さは　$2\cdot5=10$

短軸の長さは　$2\cdot1=2$



練習７） 円 $x^2+y^2=3^2$ を，x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ。

(1)　y 軸方向に $\dfrac{2}{3}$ 倍　　　(2)　y 軸方向に $\dfrac{4}{3}$ 倍

(解説)

(1)　円上に点 Q$(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$$s^2+t^2=3^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x=s,\ y=\frac{2}{3}t \quad \cdots\cdots ②$$

② より

$$s=x,\ t=\frac{3}{2}y \quad \cdots\cdots ③$$

③ を ① に代入すると

$$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=3^2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

よって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(2)　円上に点 Q$(s,\ t)$ をとり，Q が移る点を P$(x,\ y)$ とすると

$$s^2+t^2=3^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$x=s,\ y=\frac{4}{3}t \quad \cdots\cdots ②$$

② より

$$s=x,\ t=\frac{3}{4}y \quad \cdots\cdots ③$$

③ を ① に代入すると

$$x^2+\left(\frac{3}{4}y\right)^2=3^2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

よって，求める楕円の方程式は　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習８） 座標平面上において，長さが７の線分 AB の端点 A は x 軸上を，端点 B は y 軸上を動くとき，線分 AB を３：４に内分する点 P の軌跡を求めよ。

(解説)

点 A の座標を $(s,\ 0)$，点 B の座標を $(0,\ t)$ とすると，AB＝7 から

$$s^2+t^2=7^2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，P は線分 AB を３：４に内分するから

$$x=\frac{4}{7}s,\ y=\frac{3}{7}t \qquad \text{すなわち} \qquad s=\frac{7}{4}x,\ t=\frac{7}{3}y$$

これらを ① に代入すると

$$\left(\frac{7}{4}x\right)^2+\left(\frac{7}{3}y\right)^2=7^2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

よって，点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上にある。

逆に，この楕円上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ である。

練習９） 次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$　　(2)　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　　(3)　$x^2-9y^2=9$

(解説)

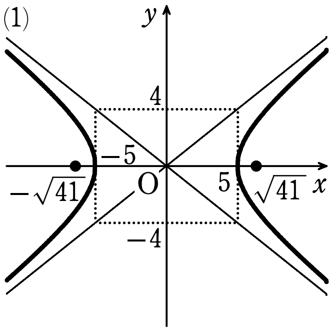
(1)　双曲線は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$ より

2 点 $(\sqrt{41},\ 0)$，$(-\sqrt{41},\ 0)$

頂点は　2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線は　2 直線 $y=\dfrac{4}{5}x$，$y=-\dfrac{4}{5}x$

(1)


(2)　与えられた方程式を変形すると

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$$

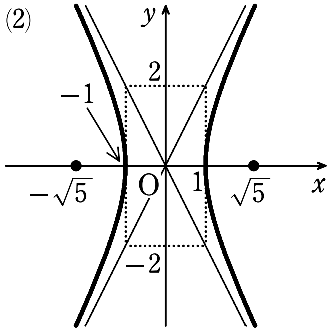
双曲線は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ より

2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

頂点は　2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$

漸近線は　2 直線 $y=2x$，$y=-2x$

(2)


(3)　与えられた方程式を変形すると

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{1^2}=1$$

双曲線は図のようになる。

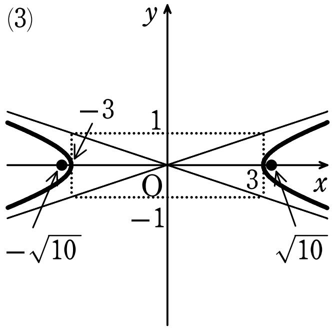
焦点は，$\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ より

2 点 $(\sqrt{10},\ 0)$，$(-\sqrt{10},\ 0)$

頂点は　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

漸近線は　2 直線 $y=\frac{1}{3}x$，$y=-\frac{1}{3}x$

(3)



練習１０） 2 点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

(解説)

求める方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ とおける。

焦点からの距離の差について，$2a=8$ であるから

$$a=4,\ a^2=16$$

焦点の座標について，$\sqrt{a^2+b^2}=5$ であるから

$$b^2=5^2-a^2=25-16=9$$

よって，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

練習１１） 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

(解説)

焦点が x 軸上にあり，原点 O に関して対称であるから，求める直角双曲線の方程式は

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>0)$ とおける。

焦点の座標について，$\sqrt{a^2+a^2}=2$ であるから　$a^2=2$

よって，求める双曲線の方程式は　$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

式と曲線【２次曲線】　練習問題

練習１２）次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=-1$　　　(2)　$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=-1$

(解説)

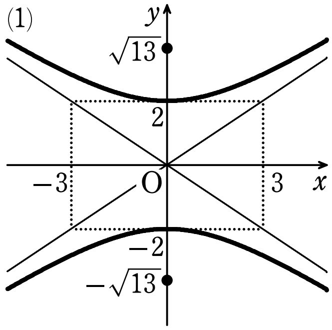
(1)　双曲線は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ より

2 点 $(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$

頂点は　2 点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

漸近線は　2 直線 $y=\dfrac{2}{3}x$，$y=-\dfrac{2}{3}x$



(2)　与えられた方程式を変形すると

$$\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{5^2}=-1$$

双曲線は図のようになる。

焦点は，$\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ より

2 点 $(0,\ \sqrt{41})$，$(0,\ -\sqrt{41})$

頂点は　2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$

漸近線は　2 直線 $y=\dfrac{5}{4}x$，$y=-\dfrac{5}{4}x$