式と曲線【２次曲線の平行移動】　p.47～49

□曲線の平行移動

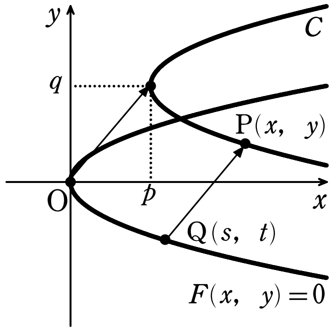
変数 x，y を含む式を $F(x,\ y)$ のように書くことがある。放物線，楕円，双曲線，円などは，x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ の形で表される。

$f(x, y)$ と表記することもある

x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の全体が曲線を表すとき，この曲線を **方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線**，または **曲線 $F(x,\ y)=0$** という。また，方程式 $F(x,\ y)=0$ をこの **曲線の方程式** という。

ここは数学Ⅰの復習です

x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ の表す曲線を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した移動後の曲線 C の方程式を求めよう。



もとの曲線上の点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ が移る点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$F(s,\ t)=0$　　　…… ①

$x=s+p$，$y=t+q$　…… ②

② より　$s=x-p$，$t=y-q$

置き換えで符号が変わる理由

これらを ① に代入すると　$F(x-p,\ y-q)=0$

が得られる。これが平行移動後の曲線 C の方程式である。

曲線 $F(x,\ y)=0$ の平行移動

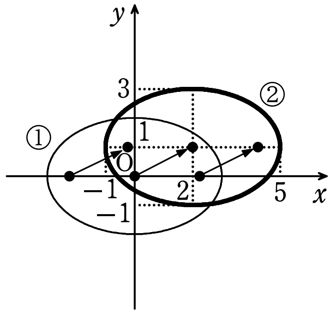
曲線 $F(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，移動後の曲線の方程式は

$$F(x-p,\ y-q)=0$$

例６） 楕円　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　…… ①

を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる楕円の方程式は，次のようになる。

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots ②$$



また，楕円①の焦点は，

2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$ であるから，

移動後の式から求めるのではなく，
点を移動させるイメージで

楕円 ② の焦点は，

2 点 $(\sqrt{5}+2,\ 1)$，$(-\sqrt{5}+2,\ 1)$

x 軸方向に 2，y 軸方向 に 1 だけ
移動する。（平行移動ではないので注意）

である。

終

□$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ の表す図形

例６ で得られた楕円の方程式

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

標準形

の分母を払って整理すると，次のようになる。

$$4x^2+9y^2-16x-18y-11=0 \quad \cdots\cdots ②$$

一般形

逆に，方程式 ② が与えられた場合は，② を ① の形に変形することによって，その方程式の表す図形が楕円であることがわかる。

例題３） 次の方程式はどのような図形を表すか。

$$x^2-4y^2+2x+16y-19=0$$

解答　この方程式を変形すると

$$(x^2+2x)-4(y^2-4y)-19=0$$
$$(x+1)^2-1-4\{(y-1)^2-4\}-19=0$$
$$(x+1)^2-1-4(y-1)^2+16-19=0$$

平方完成
２取り２で割り２乗引く

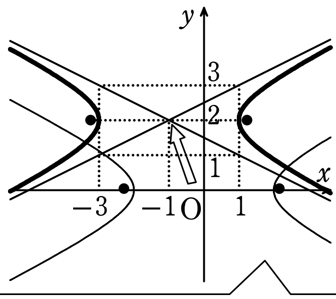
すなわち　$(x+1)^2-4(y-2)^2=4$

$$\frac{(x+1)^2}{4}-(y-2)^2=1$$

＝1 にする

よって，この方程式は，双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。

例題３の双曲線の概形は右の図のようになる。



双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ の焦点は

2 点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

漸近線は　2 直線 $y=\frac{1}{2}x$，$y=-\frac{1}{2}x$ である。

漸近線 $y=\pm\frac{1}{2}x$ の交点（原点）を平行移動させればかける

よって，例題３の双曲線の

焦点は　2 点 $(\sqrt{5}-1,\ 2)$，$(-\sqrt{5}-1,\ 2)$

漸近線は　2 直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

である。

x 軸方向に -1，y 軸方向 に 2 だけ移動する。
（点の移動は足し算、関数の移動は置き換えで）

$y-2=\frac{1}{2}(x+1)$，
$y-2=-\frac{1}{2}(x+1)$

式と曲線【２次曲線の平行移動】　p.47～49

例題） 曲線 $y^2-6y-4x-7=0$ は放物線であることを示し，その概形をかけ。

また，頂点と焦点，および準線を求めよ。

解答　与えられた方程式を平方完成すると

$(y-3)^2-9-4x-7=0$

$(y-3)^2=4x+16$

４をくくり出す！

すなわち $(y-3)^2=4(x+4)$ …… ①

この曲線は，放物線 $y^2=4x$ を

x 軸方向に -4，y 軸方向に 3 だけ

平行移動した放物線である。

また，$y^2=4x$ の頂点は原点 $(0,\ 0)$，

焦点は点 $(1,\ 0)$，

準線は直線 $x=-1$ であるから，

放物線 ① の頂点，焦点，準線は，

これらを x 軸方向に -4，

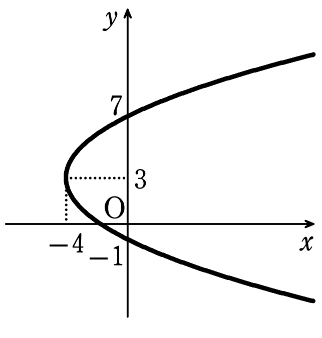
y 軸方向に 3 だけ平行移動して，次のようになる。

頂点は点 $(-4,\ 3)$，

焦点は点 $(-3,\ 3)$，

準線は直線 $x=-5$

よって，その概形は図のようになる。



点の移動は足し算

関数の移動は置き換え

頂点 $(0,\ 0)$

$\Rightarrow (0+(-4),\ 0+3)$

$\Rightarrow (-4,\ 3)$

焦点 $(1,\ 0)$

$\Rightarrow (1+(-4),\ 0+3)$

$\Rightarrow (-3,\ 3)$

準線 $x=-1$

$\Rightarrow x-(-4)=-1$

$x=-5$

式と曲線【２次曲線の平行移動】　p.47～49

例題） 次の方程式 $9x^2+4y^2-18x-24y+9=0$ はどのような図形を表すか。

また，その概形をかけ。

解答　与えられた方程式を平方完成すると

$$9x^2-18x+4y^2-24y+9=0$$

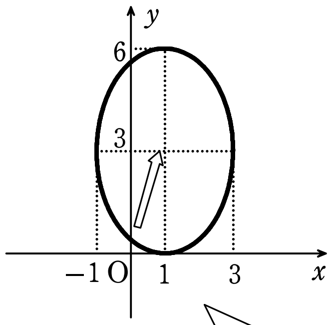
$$9(x^2-2x)+4(y^2-6y)=-9$$

$$9\{(x-1)^2-1\}+4\{(y-3)^2-9\}=-9$$

$$9(x-1)^2-9+4(y-3)^2-36=-9$$

すなわち　$9(x-1)^2+4(y-3)^2=36$

よって　$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$



中心を平行移動
→短軸，長軸をとって
楕円を描く

この曲線は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を

x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円で，

その概形は図のようになる。

式と曲線【２次曲線の平行移動】　練習問題

練習１３） 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

練習１４） 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

練習１５） 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+4y^2+6x-8y+9=0$

(2)　$y^2+8y-16x=0$

(3)　$4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

式と曲線【２次曲線の平行移動】　練習問題

練習１３） 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき，移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

(解説)

移動後の楕円の方程式は　　$\dfrac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$

また，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の焦点は，2 点 $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ であるから，移動後の楕円の焦点の座標は　　$(\sqrt{3}+3,\ -2)$，$(-\sqrt{3}+3,\ -2)$

練習１４） 放物線 $y^2=4x$ を，x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき，移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

(解説)

移動後の放物線の方程式は　　$(y-2)^2=4(x+1)$

また，放物線 $y^2=4x$ の焦点は，点 $(1,\ 0)$ であるから，移動後の放物線の焦点の座標は

$(0,\ 2)$

式と曲線【２次曲線の平行移動】　練習問題

練習１５） 次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+4y^2+6x-8y+9=0$

(2)　$y^2+8y-16x=0$

(3)　$4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

解説

(1)　この方程式を変形すると

$$(x^2+6x)+4(y^2-2y)+9=0$$

$$(x+3)^2-3^2+4\{(y-1)^2-1^2\}+9=0$$

すなわち　$(x+3)^2+4(y-1)^2=4$

$$\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2=1$$

よって，この方程式は，楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す。

(2)　この方程式を変形すると

$$(y+4)^2-4^2-16x=0$$

すなわち　$(y+4)^2=16(x+1)$

よって，この方程式は，放物線 $y^2=16x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線を表す。

(3)　この方程式を変形すると

$$4(x^2-4x)-9(y^2+4y)-56=0$$

$$4\{(x-2)^2-2^2\}-9\{(y+2)^2-2^2\}-56=0$$

すなわち　$4(x-2)^2-9(y+2)^2=36$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

よって，この方程式は，双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線を表す。