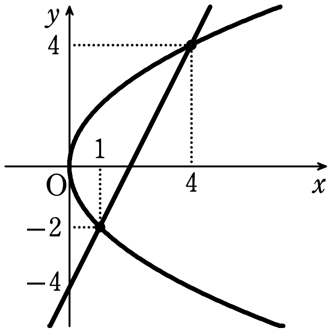
式の曲線【２次曲線と直線】 p.50～53

□２次曲線と直線の共有点

２次曲線を用いているが、やることは今までと同じ

例題） 放物線 $y^2=4x$ と直線 $2x-y=4$ の<u>共有点の座標</u>を求めよ。

基本は連立方程式



解答　　$y^2=4x$ ……①

$2x-y=4$ ……②　とする。

② から　$y=2x-4$

これを ① に代入すると　$(2x-4)^2=4x$

整理すると　$x^2-5x+4=0$

すなわち　$(x-1)(x-4)=0$

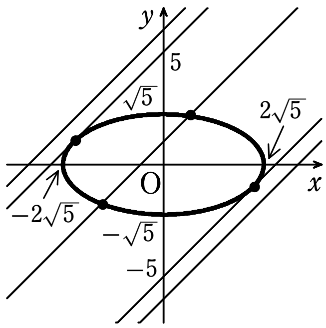
これを解いて　$x=1,\ 4$

$x=1$ のとき　$y=-2$　　$x=4$ のとき　$y=4$

よって，求める共有点の座標は　$(1,\ -2)$，$(4,\ 4)$

例題４） k は定数とする。次の楕円と直線の共有点の個数を調べよ。

$$x^2+4y^2=20,\ y=x+k$$



解答　　$x^2+4y^2=20$ ……①

$y=x+k$ ……②

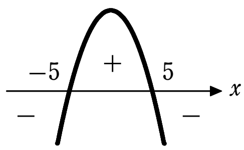
② を ① に代入すると

$x^2+4(x+k)^2=20$

整理すると

$5x^2+8kx+4k^2-20=0$ ……③

x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とすると



$$\frac{D}{4}=(4k)^2-5(4k^2-20)=-4(k+5)(k-5)$$

よって，楕円 ① と直線 ② の共有点の個数は，次のようになる。

$D>0$ より　$-4(k+5)(k-5)>0$　$\therefore$　$(k+5)(k-5)<0$

すなわち $-5<k<5$　のとき　共有点は 2 個

$D=0$ より　$-4(k+5)(k-5)=0$　$\therefore$　$(k+5)(k-5)=0$

すなわち $k=\pm5$　のとき　共有点は 1 個

$D<0$ より　$-4(k+5)(k-5)<0$　$\therefore$　$(k+5)(k-5)>0$

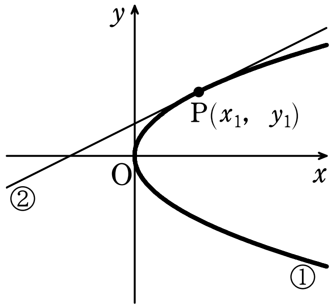
すなわち $k<-5,\ 5<k$ のとき　共有点は 0 個

グラフがイメージ出来ていればここまで丁寧な計算は不要

例題４ において，$k=\pm5$ のとき，2 次方程式 ③ の解は**重解**となり，楕円と直線は共有点をただ 1 つもつ。このとき，楕円と直線は **接する** といい，その直線を楕円の **接線**，共有点を **接点** という。

一般に，2 次曲線と直線の方程式から 1 文字を消去して得られる 2 次方程式の実数解の個数と，2 次曲線と直線の共有点の個数は一致する。

研究　２次曲線の接線の方程式



放物線　$y^2=4px$　…… ①　について，① 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$y_1y=2p(x+x_1)$　…… ②

であることが知られている。このことを確かめてみよう。

② から　$2px=y_1y-2px_1$

① に代入して整理すると　$y^2-2y_1y+4px_1=0$　…… ③

ここで，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は放物線 ① 上にあるから　$y_1{}^2=4px_1$

よって　$y^2-2y_1y+y_1{}^2=0$　すなわち　$(y-y_1)^2=0$

したがって，2 次方程式 ③ は重解 $y=y_1$ をもつから，放物線 ① と直線 ② は，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ で接する。すなわち，放物線 ① 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は ② である。

次に楕円上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式を求めてみよう。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

[1]　点 P が x 軸上にないとき，P における楕円 ① の接線の方程式を　$y=m(x-x_1)+y_1$　…… ②

とおく。② を ① に代入して整理し，定数項を k とすると

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2m(mx_1-y_1)x+k=0 \quad \cdots\cdots ③$$

直線 ② は，P において楕円 ① に接するから，$x=x_1$ は 2 次方程式 ③ の重解である。

よって　$x_1=\dfrac{a^2m(mx_1-y_1)}{a^2m^2+b^2}$

m について解くと，P は x 軸上にないから，$y_1\fallingdotseq 0$ で　$m=-\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$

これを ② に代入して整理すると　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}$

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円 ① 上にあるから　$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$

したがって，接線の方程式は　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

[2]　点 P が x 軸上にあるときも，接線はこの方程式で与えられる。

同様にして，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ となることがわかる。

> 数Ⅱで学んだ
> 円の接線の方程式の
> 覚え方が流用できる
> $x^2+y^2=r^2$
> $\Rightarrow x\cdot x+y\cdot y=r^2$
> $\Rightarrow x_1x+y_1y=r^2$
> $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
> $\Rightarrow(x-a)(x-a)+(y-b)(y-b)=r^2$
> $\Rightarrow(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

【曲線の接線の方程式】

放物線 $y^2=4px$ の接線の方程式は　$\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$

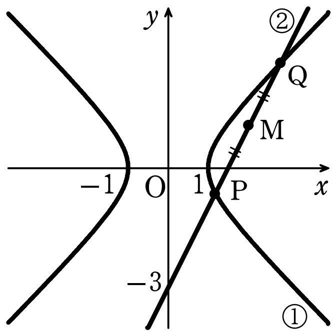
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1}$

式の曲線【２次曲線と直線】　p.50～53

応用例題２） 双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=2x-3$ の２つの交点を P，Q とするとき，
線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

考え方 … 双曲線と直線の方程式から y を消去すると x の２次方程式が得られる。
線分 PQ の中点の x 座標を求めるには，この２次方程式に解と係数の関係を適用すればよい。



$\boxed{解答}$

$x^2-y^2=1$ …… ①

$y=2x-3$ …… ②

② を ① に代入すると　$x^2-(2x-3)^2=1$

整理すると

$3x^2-12x+10=0$ …… ③

点 P，Q の x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，

x_1，x_2 は２次方程式 ③ の異なる２つの実数解である。

M は線分 PQ の中点であるから，

その座標を (x, y) とすると

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

③ において，解と係数の関係により

$$x_1+x_2=-\frac{-12}{3}=4$$

よって　$x=\frac{4}{2}=2$

② に代入すると　$y=2\cdot2-3=1$

したがって，M の座標は　$(2, 1)$

$\boxed{補足}$

応用例題２の解答は、「２つの交点を P，Q とするとき…」とあるので、交点双曲線と直線の交点が存在することを前提としている。

⇒厳密には、２次方程式③が異なる２つの実数解をもつことを確認しなければいけない

⇒③の判別式を D とすると $D>0$ でなくてはいけない

したがって、$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\cdot10=6$

よって　$D>0$ は明らかである

と言うことを確認しておくと良い

式の曲線【２次曲線と直線】　p.50～53

□２次曲線に引いた接線の方程式

数学Ⅱで学んだことの延長線上

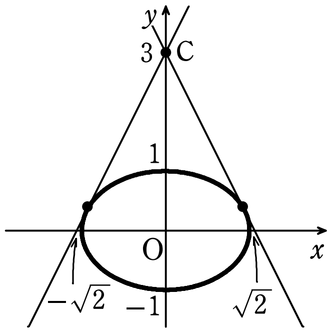
２次曲線上にない点から２次曲線に接線を引くとき，その接線の方程式を求めてみよう。

応用例題３） 点 C$(0,\ 3)$ から楕円 $x^2+2y^2=2$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。

考え方 … 点 C$(0,\ 3)$ を通る接線の方程式は，$y=mx+3$ とおける。この式と楕円の式から

y を消去して x の２次方程式を作ると，直線が楕円に接するのは，

判別式 D について，$D=0$ のときである。



解答　点 C を通る接線は，x 軸に垂直ではないから，

その方程式は　$y=mx+3$ とおける。

これを楕円の式に代入すると

$x^2+2(mx+3)^2=2$

整理すると

$(2m^2+1)x^2+12mx+16=0$　……$(*)$

この x の２次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(6m)^2-(2m^2+1)\cdot 16=4(m^2-4)$$

直線が楕円に接するのは $D=0$ のときであるから　$m=\pm 2$

よって，接線の方程式は

$y=2x+3$，$y=-2x+3$

補足　接点の x 座標は，$x=\pm\dfrac{4}{3}$ である。

$(*)$について重解の公式より

$$x=-\frac{12m}{2(2m^2+1)}=-\frac{6m}{2m^2+1}$$

これに $m=\pm 2$ を代入する

別解　接点を $(\ a\ ,\ b\ )$ とすると　楕円 $x^2+2y^2=2$ に引いた接線の方程式は

$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ より　　$\dfrac{ax}{2}+by=1$ ……③　とおける

これが　点 A$(0,\ 3)$ を通るので　$3b=1$　　$\therefore$　$b=\dfrac{1}{3}$

また　接点は楕円 $x^2+2y^2=2$ 上に存在するので　$a^2+2b^2=2$

これに　$b=\dfrac{1}{3}$ を代入すると　$a^2+\dfrac{2}{9}=\dfrac{18}{9}$　より　$a^2=\dfrac{16}{9}$

$\therefore$　$a=\pm\dfrac{4}{3}$

したがって求める接線は③より

$a=\dfrac{4}{3}$ のとき　$\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y=1$　つまり　$y=-2x+3$

$a=-\dfrac{4}{3}$ のとき　$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y=1$　つまり　$y=2x+3$

式の曲線【２次曲線と直線】　練習問題

練習１６） k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を調べよ。

練習１７） 楕円 $x^2+9y^2=9$ と直線 $y=x+2$ の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

式の曲線【２次曲線と直線】　練習問題

練習１８） 点 $C(4,\ 0)$ から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

練習１） 次の曲線上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1)　放物線 $y^2=4x$，$P(1,\ 2)$

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$P(3,\ 1)$

式の曲線【２次曲線と直線】　練習問題

練習１６）k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を調べよ。

解説

$y=x+k$ を $x^2-2y^2=4$ に代入すると

$$x^2-2(x+k)^2=4$$

整理すると　$x^2+4kx+2k^2+4=0$

この x の２次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-1\cdot(2k^2+4)=2(k^2-2)$$

よって，この双曲線と直線の共有点の個数は，次のようになる。

$D>0$　すなわち　$k<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<k$ のとき　２個

$D=0$　すなわち　$k=\pm\sqrt{2}$　のとき　１個

$D<0$　すなわち　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　のとき　０個

練習１７）楕円 $x^2+9y^2=9$ と直線 $y=x+2$ の２つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

解説

$x^2+9y^2=9$　……①

$y=x+2$　……②

② を ① に代入すると　$x^2+9(x+2)^2=9$

整理すると　$10x^2+36x+27=0$　……③

点 P，Q の x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とすると，x_1，x_2 は２次方程式 ③ の異なる２つの実数解である。

M は線分 PQ の中点であるから，その座標を $(x,\ y)$ とすると　$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$

③ において，解と係数の関係により　$x_1+x_2=-\dfrac{36}{10}=-\dfrac{18}{5}$

よって　$x=\dfrac{-\dfrac{18}{5}}{2}=-\dfrac{9}{5}$

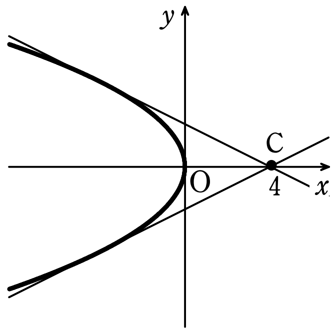
② に代入すると　$y=-\dfrac{9}{5}+2=\dfrac{1}{5}$

したがって，M の座標は　$\left(-\dfrac{9}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

式の曲線【２次曲線と直線】　練習問題

練習１８） 点 C$(4,\ 0)$ から放物線 $y^2=-4x$ に接線を引くとき，その接線の方程式を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

(解説)



点 C を通る接線は，x 軸に垂直ではないから，その方程式は $y=m(x-4)$ とおける。この接線は y 軸にも垂直ではないから，$m\fallingdotseq 0$ である。

これを放物線の式に代入すると

$$m^2(x-4)^2=-4x$$

整理すると

$$m^2x^2-4(2m^2-1)x+16m^2=0$$

この x の２次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-2(2m^2-1)\}^2-m^2\cdot 16m^2=4(1-4m^2)$$

直線が放物線に接するのは $D=0$ のときである。

$1-4m^2=0$ を解くと　　$m=\pm\dfrac{1}{2}$

このとき，接点の x 座標は　　$x=-\dfrac{-4(2m^2-1)}{2m^2}=\dfrac{2(2m^2-1)}{m^2}$

よって，接線の方程式，接点の座標は

$m=\dfrac{1}{2}$ のとき　　$y=\dfrac{1}{2}x-2$，$(-4,\ -4)$

$m=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=-\dfrac{1}{2}x+2$，$(-4,\ 4)$

練習１） 次の曲線上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1)　放物線 $y^2=4x$，P$(1,\ 2)$　　　　(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，P$(3,\ 1)$

(解説)

(1)　$2y=2\cdot 1\cdot(x+1)$　すなわち　$y=x+1$

(2)　$\dfrac{3x}{12}+\dfrac{1\cdot y}{4}=1$　すなわち　$y=-x+4$