式と曲線【２次曲線の性質・離心率】　p.54～55

放物線は，点 P から焦点 F までの距離 PF と，準線 ℓ までの距離 PH が等しい点 P の軌跡として定義された。楕円や双曲線も，放物線の場合と同様に，１つの焦点と１つの直線をもとに考えることができる。

応用例題４） 点 F(4，0) からの距離と，直線 $x=1$ からの距離の比が 1：2 である点 P の軌跡を求めよ。

考え方 … 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。P から直線 $x=1$ に下ろした垂線を PH とすると PF：PH＝1：2 である。

解答　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P から直線 $x=1$ に下ろした垂線を PH とすると

PF：PH＝1：2

これより　　PH＝2PF

すなわち　　$\mathrm{PH}^2=4\mathrm{PF}^2$

$\mathrm{PH}^2=(x-1)^2+(y-y)^2=(x-1)^2$,

$\mathrm{PF}^2=(x-4)^2+(y-0)^2=(x-4)^2+y^2$

を代入すると

$$(x-1)^2=4\{(x-4)^2+y^2\}$$

$$x^2-2x+1=4(x^2-8x+16+y^2)$$

すなわち　　$3x^2-30x+4y^2+63=0$

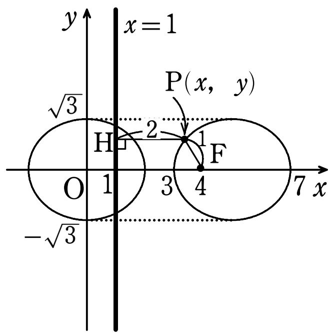
この方程式を変形すると　$3(x^2-10x)+4y^2+63=0$

$$3\{(x-5)^2-25\}+4y^2+63=0$$

$$3(x-5)^2-75+4y^2+63=0$$

$$3(x-5)^2+4y^2=12$$

$$\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \quad \cdots\cdots ①$$



よって，点 P は楕円 ① 上にある。

逆に，楕円 ① 上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

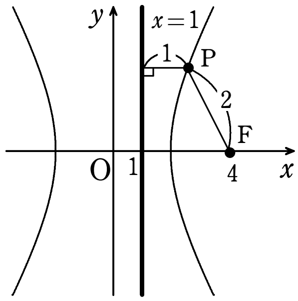
したがって，求める軌跡は，

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を x 軸方向に 5 だけ平行移動した楕円である。

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点は，2 点 (1，0)，(−1，0) であるから，応用例題４ の楕円 ① の焦点は (6，0)，(4，0) である。これより，応用例題４の点 F(4，0) は，楕円 ① の焦点の１つであることがわかる。

式と曲線【２次曲線の性質･離心率】　p.54～55

練習１９） 点 F$(4,\ 0)$ からの距離と，直線 $x=1$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡は，双曲線であることを示せ。

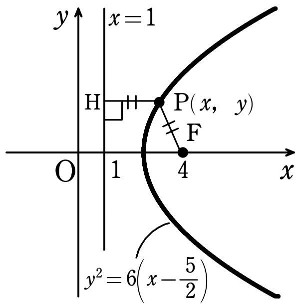


解答　点 P の座標を $(x,\ y)$，
点 P から直線 $x=1$ に下ろした垂線を PH とする。
P の満たす条件は　　$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=2:1$
これより　　$2\mathrm{PH}=\mathrm{PF}$　　すなわち　　$4\mathrm{PH}^2=\mathrm{PF}^2$
$\mathrm{PH}^2=(x-1)^2$，$\mathrm{PF}^2=(x-4)^2+y^2$ を代入すると
$4(x-1)^2=(x-4)^2+y^2$　　すなわち　　$3x^2-y^2=12$
よって　　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　……①

ゆえに，条件を満たす点 P は双曲線 ① 上にある。逆に双曲線 ① 上の任意の点は条件を満たす。

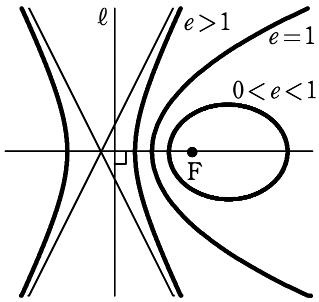
したがって，点 P の軌跡は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ である。

また，$\sqrt{4+12}=4$ から，焦点の座標は　　2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$
よって，点 F$(4,\ 0)$ はこの双曲線の焦点の 1 つである。



点 F$(4,\ 0)$ からの距離と，直線 $x=1$からの距離の比が $1:1$ である点 P の軌跡は，放物線の定義により，焦点 F$(4,\ 0)$，準線 $x=1$ の放物線である。
点 P の座標を $(x,\ y)$ として，PF＝PH から
この放物線の方程式を求めると，$y^2=6\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ である。

一般に，定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点 P の軌跡について，次のことが知られている。



[1]　$0<e<1$ のとき　　F を焦点の 1 つとする楕円
[2]　$e=1$ のとき　　F を焦点，ℓ を準線とする放物線
[3]　$e>1$ のとき　　F を焦点の 1 つとする双曲線
【補足】e が 0 に近いほど，点 P の軌跡は円に近づく。

この e の値を，2 次曲線の **離心率** といい，直線 ℓ を **準線** という。
また，この方法で円を表すことはできない。

前ページの応用例題 4 は上の [1] の場合で，$e=\dfrac{1}{2}$ である。

式と曲線【２次曲線の性質･離心率】　練習問題

問題６） 原点Oからの距離と，直線 $x=3$ からの距離の比が一定で $e:1$ である点Pについて，e が次の値のときの軌跡を求めよ。

(1)　$e=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$e=1$　　(3)　$e=2$

問題６） 原点Ｏからの距離と，直線 $x=3$ からの距離の比が一定で $e:1$ である点Ｐについて，e が次の値のときの軌跡を求めよ。

(1)　$e=\dfrac{1}{2}$　　(2)　$e=1$　　(3)　$e=2$

(解説)

点Ｐの座標を $(x,\ y)$，Ｐから直線 $x=3$ に下ろした垂線を PH とする。

(1)　$\mathrm{PO}:\mathrm{PH}=\dfrac{1}{2}:1$ から　　$\mathrm{PH}=2\mathrm{PO}$

すなわち　　$\mathrm{PH}^2=4\mathrm{PO}^2$

$\mathrm{PH}^2=(x-3)^2$，$\mathrm{PO}^2=x^2+y^2$ を代入すると

$$(x-3)^2=4(x^2+y^2)$$

すなわち　　$3x^2+6x+4y^2-9=0$

この方程式を変形すると　　$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　……①

よって，点Ｐは楕円①上にある。

逆に，楕円①上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円である。

(2)　$\mathrm{PH}=\mathrm{PO}$ から　　$\mathrm{PH}^2=\mathrm{PO}^2$

$\mathrm{PH}^2=(x-3)^2$，$\mathrm{PO}^2=x^2+y^2$ を代入すると

$$(x-3)^2=x^2+y^2$$

すなわち　　$y^2+6x-9=0$

この方程式を変形すると　　$y^2=-6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$　……①

よって，点Ｐは放物線①上にある。

逆に，放物線①上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，放物線 $y^2=-6x$ を x 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動した放物線である。

(3)　$\mathrm{PO}:\mathrm{PH}=2:1$ から　　$2\mathrm{PH}=\mathrm{PO}$

すなわち　　$4\mathrm{PH}^2=\mathrm{PO}^2$

$\mathrm{PH}^2=(x-3)^2$，$\mathrm{PO}^2=x^2+y^2$ を代入すると

$$4(x-3)^2=x^2+y^2$$

すなわち　　$3x^2-24x-y^2+36=0$

この方程式を変形すると　　$\dfrac{(x-4)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　……①

よって，点 P は双曲線 ① 上にある。

逆に，双曲線 ① 上のすべての点 $P(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ を x 軸方向に 4 だけ平行移動した双曲線である。