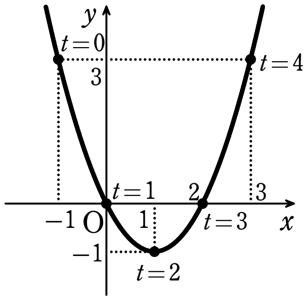
式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

□曲線の媒介変数表示



点 P の座標 x，y が変数 t によって　$x=t-1$，$y=t^2-4t+3$ で表されるとき，例えば t を 0，1，2，3，4 とすると，P の座標は，それぞれ　$(-1,\ 3)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$，$(3,\ 3)$ となる。これらの点を座標平面上にとることによって，点 P の軌跡をかくことができる。

第 1 式 $x=t-1$ を t について解くと　$t=x+1$

これを $y=t^2-4t+3$ に代入すると　$y=(x+1)^2-4(x+1)+3$

よって，上でかいた曲線は関数 $y=x^2-2x$ のグラフである。

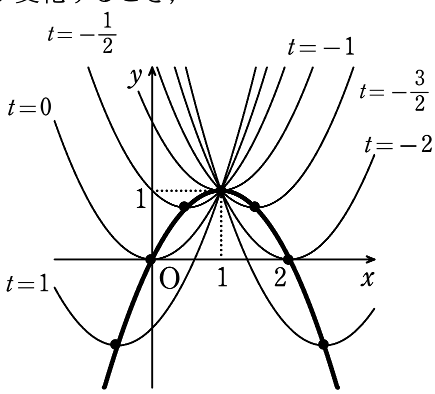
一般に，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が，変数 t によって

$$x=f(t)\,,\quad y=g(t)\qquad \cdots\cdots ①$$

の形に表されるとき，これを曲線 C の **媒介変数表示** といい，変数 t を **媒介変数** または **パラメータ** という。① から t を消去して x，y の方程式 $F(x,\ y)=0$ が得られるとき，これは曲線 C を表す方程式である。

【注意】曲線 C の媒介変数による表示の仕方は，一通りではない。

例題５） 放物線 $y=x^2+2tx-2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。



解答　放物線の方程式を変形すると

$$y=(x+t)^2-t^2-2t$$

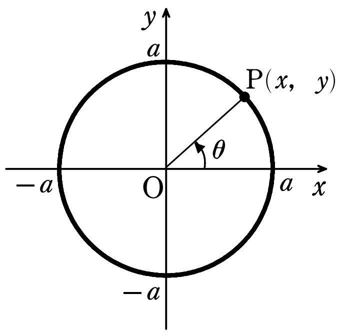
その頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=-t,\quad y=-t^2-2t$$

t を消去すると　$y=-x^2+2x$

よって，頂点 P が描く曲線は，放物線 $y=-x^2+2x$ である。

□一般角 θ を用いた円の媒介変数表示



原点 O を中心とする半径 a の円　$x^2+y^2=a^2$　$\cdots\cdots$ ①

上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，動径 OP の表す一般角を θ とすると，三角関数の定義から　$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

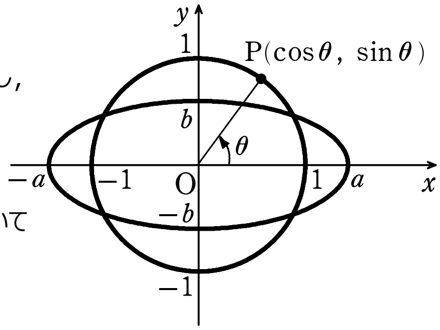
ただし，θ は弧度法で表した角とする。

これは，円 ① の媒介変数表示である。

参考　戻すときは $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入する

式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

□楕円の媒介変数表示



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …… ② 上の点 Q$(x,\ y)$ に対し，

$X=\dfrac{x}{a}$，$Y=\dfrac{y}{b}$ とおくと P$(X,\ Y)$ は

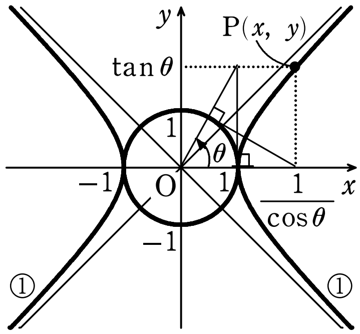
円 $X^2+Y^2=1$ 上にあるから，円の媒介変数表示を用いて

$$\frac{x}{a}=\cos\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\theta$$

と表される。したがって，楕円 ② の媒介変数表示は次のようになる。

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$$

□双曲線の媒介変数表示



双曲線 $x^2-y^2=1$ …… ①について三角関数を用いた媒介変数表示を考えてみよう。

三角関数について $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

すなわち $\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$

が成り立つから　$x=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$y=\tan\theta$　…… ②

とおくと，点 P$(x,\ y)$ は双曲線 ① 上にある。

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$\dfrac{1}{\cos\theta}\leqq-1$，$1\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$

また，$\tan\theta$ は任意の実数値をとる。よって，角 θ が動くと，② で与えられる点 P$(x,\ y)$ は双曲線 ① 上の点すべてを動く。 したがって，双曲線 ① の媒介変数表示は，② で与えられる。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ …… ③ の媒介変数表示を考えてみよう。

双曲線 ③ 上の点 Q$(x,\ y)$ に対し，$X=\dfrac{x}{a}$，$Y=\dfrac{y}{b}$ とおくと，P$(X,\ Y)$ は

双曲線 $X^2-Y^2=1$ 上にあるから，双曲線 ① の媒介変数表示 ② を用いて

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{b}=\tan\theta$$

と表される。したがって，双曲線 ③ の媒介変数表示は次のようになる。

$$x=\frac{a}{\cos\theta},\quad y=b\tan\theta$$

式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

□媒介変数で表された曲線の平行移動

一般に，媒介変数で表された曲線の平行移動について，次のことが成り立つ。

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ の平行移動

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の媒介変数表示は

$$x=f(t)+p,\quad y=g(t)+q$$

応用例題５） 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

$$x=2\cos\theta+1,\quad y=2\sin\theta+3$$

考え方 … $\sin\theta$，$\cos\theta$ を x，y で表し，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入する。

解答

$$\sin\theta=\frac{y-3}{2},\quad \cos\theta=\frac{x-1}{2}$$

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}=1$$

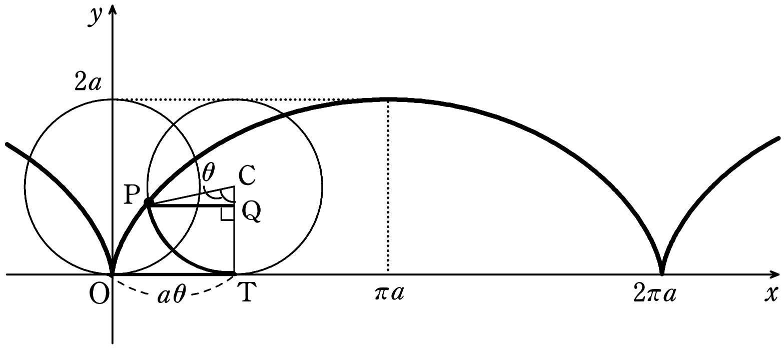
よって　$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$

これは，点 $(1,\ 3)$ を中心とする半径 2 の円を表す。

応用例題５ の曲線は，媒介変数表示 $x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ で表される曲線を，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

□サイクロイド

円が定直線上をすべることなく回転していくとき，円上の定点 P が描く曲線を **サイクロイド** という。



円の半径が a のとき，サイクロイドの媒介変数表示を求めてみよう。

上の図のように，定直線を x 軸とし，点 P の最初の位置を原点 O とする。また，円が角 θ だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，円の中心を C，x 軸との接点を T とする。

式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

このとき，上の図において，$\mathrm{OT}=\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=a\theta$ であるから

$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}$ は弧 TP の長さを表している。
半径が a，中心角が θ ラジアンの扇形の弧の長さは，$a\theta$ である。

$$x=\mathrm{OT}-\mathrm{PQ}=a\theta-a\sin\theta$$
$$y=\mathrm{CT}-\mathrm{CQ}=a-a\cos\theta$$

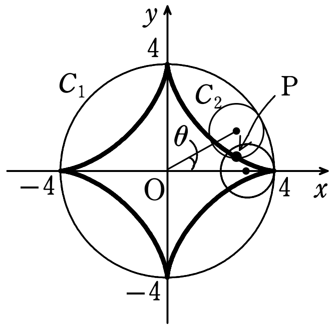
と表される。結果の式は，$\sin\theta<0$ や $\cos\theta<0$ のときも成り立つ。

よって，サイクロイドの媒介変数表示は，次のようになる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=a(\theta-\sin\theta)} \\ \boldsymbol{y=a(1-\cos\theta)} \end{cases}$$

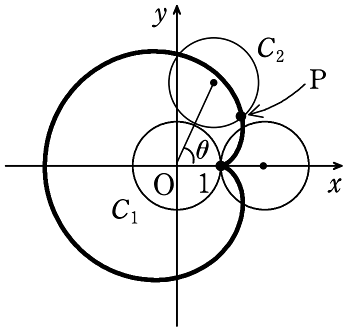
研究　いろいろな曲線の媒介変数表示

例１） 原点 O を中心とする半径 4 の定円 C_1 上を，
半径 1 の円 C_2 が内接しながらすべることなく回転していく。
円 C_2 上の定点 P の最初の位置を点 $(4,\ 0)$ とすると，
P は右の図のような曲線を描く。
この曲線の媒介変数表示は，次のようになる。
$x=4\cos^3\theta$，$y=4\sin^3\theta$　終



円 C_1，C_2 の**半径の比が** 4：1 のとき，
例 1 のようにして描かれる曲線を **アステロイド** または **星芒形** という。

例２） 原点 O を中心とする半径 1 の定円 C_1 上を，
半径 1 の円 C_2 が外接しながらすべることなく回転していく。
円 C_2 上の定点 P の最初の位置を点 $(1,\ 0)$ とすると，
P は右の図のような曲線を描く。
この曲線の媒介変数表示は，次のようになる。
$x=2\cos\theta-\cos 2\theta$，$y=2\sin\theta-\sin 2\theta$　終



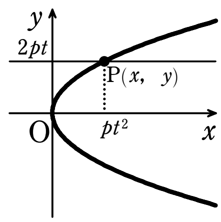
円 C_1，C_2 の**半径が等しいとき**，
例 2 のようにして描かれる曲線を**カージオイド** または **心臓形** という。

研究　**直線群と媒介変数表示**

放物線 $y^2=4px$ を媒介変数を用いて表してみよう。

直線 $y=2pt$ を考える。t の値が変化するとき，これらの直線は x 軸に平行な直線群を表し，各直線 $y=2pt$ と放物線の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\boldsymbol{x=pt^2}$，$\boldsymbol{y=2pt}$　これは，放物線 $y^2=4px$ の媒介変数表示である。



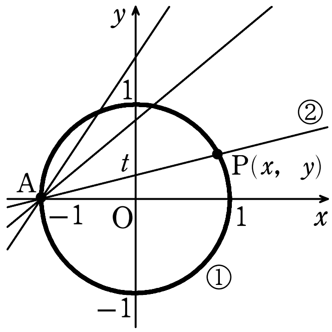
式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

研究　分数式による円の媒介変数表示

次の円と，円上の点 A$(-1,\ 0)$ を通る傾き t の直線を考える。

円　$x^2+y^2=1$　……①　　　直線　$y=t(x+1)$　……②

円 ① と直線 ② の A 以外の交点を P$(x,\ y)$ として，まず P の座標を求めてみよう。



② を ① に代入すると　$x^2+t^2(x+1)^2=1$

整理すると　$(x+1)\{(1+t^2)x+t^2-1\}=0$

$x \neq -1$ であるから　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

これを ② に代入すると　$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$

よって，P の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ である。

ここで，t の値が変化するとき，上の点 P は，円 ① 上を動く。ただし，点 A$(-1,\ 0)$ は除かれる。

このことから，点 P が描く曲線は，t を媒介変数として　$\boldsymbol{x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\dfrac{2t}{1+t^2}}$

のように媒介変数表示されることがわかる。この図形は，円 $x^2+y^2=1$ から点 A$(-1,\ 0)$ を除いたものである。

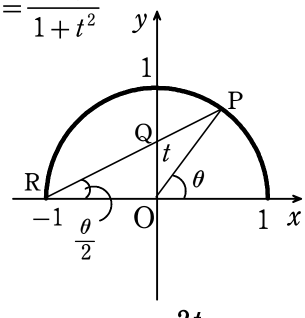
研究　三角関数の媒介変数表示

円 $x^2+y^2=1$ の $y>0$ の部分を C とする。C 上の点 P と点 R$(-1,\ 0)$ を結ぶ直線 PR と y 軸の交点を Q とし，その座標を $(0,\ t)$ とする。点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ。

点 P は $y>0$ の範囲にあるから　$\sin\theta>0$　よって，以下，$0<\theta<\pi$ として考える。

このとき　$\angle \mathrm{PRO}=\dfrac{\theta}{2}$　また，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\tan\dfrac{\theta}{2}$ が定義され，　$\tan\dfrac{\theta}{2}=t\ (>0)$ となる。

ゆえに　$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}-1=\dfrac{2}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$



$\sin\theta>0$ であるから

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}=\sqrt{\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^2}}$

$t>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

よって　**$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のとき　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$**　となる

式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

練習２０） 媒介変数表示される次の曲線について，t を消去して x，y の方程式を求め，曲線の概形をかけ。

(1)　$x=t+1$，$y=t^2+4t$　　　　(2)　$x=2t$，$y=2t-t^2$

練習２１） 放物線 $y=-x^2+4tx+2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

練習２２） 角 θ を媒介変数として，次の円を表せ。

(1)　$x^2+y^2=2^2$　　　　(2)　$x^2+y^2=2$

練習２３） 角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　　　(2)　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

練習２５） 双曲線 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ を媒介変数 θ を用いて表せ。

式と曲線【曲線の媒介変数表示】 p.57～63

練習２６） 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta-1$

(2) $x=3\cos\theta+1$，$y=2\sin\theta+3$

練習２７） 半径 3 の円が x 軸上をすべることなく回転していくとき，円上の定点 P の描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ。ただし，点 P の最初の位置を原点 O，円の中心の最初の位置を点 (0，3) とする。

練習２０） 媒介変数表示される次の曲線について，t を消去して x，y の方程式を求め，曲線の概形をかけ。

(1) $x=t+1$，$y=t^2+4t$ (2) $x=2t$，$y=2t-t^2$

(解説)

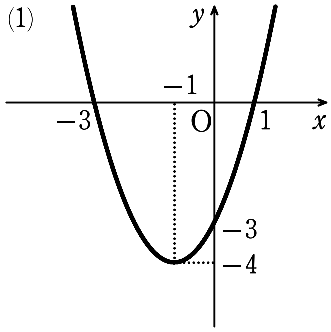
(1) $x=t+1$ から $t=x-1$

これを $y=t^2+4t$ に代入して

$$y=(x-1)^2+4(x-1)$$

すなわち $y=x^2+2x-3$

$y=(x+1)^2-4$ より，曲線の概形は図のようになる。



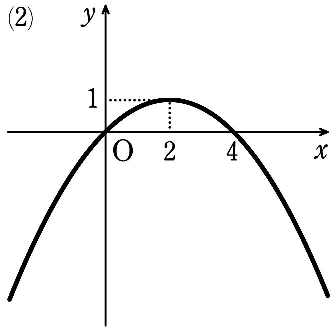
(2) $x=2t$ から $t=\dfrac{1}{2}x$

これを $y=2t-t^2$ に代入して

$$y=2\left(\frac{1}{2}x\right)-\left(\frac{1}{2}x\right)^2$$

すなわち $y=-\dfrac{1}{4}x^2+x$

$y=-\dfrac{1}{4}(x-2)^2+1$ より，曲線の概形は図のようになる。



練習２１） 放物線 $y=-x^2+4tx+2t$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

(解説)

放物線の方程式を変形すると $y=-(x-2t)^2+4t^2+2t$

その頂点を P$(x,\ y)$ とすると $x=2t$，$y=4t^2+2t$

t を消去すると $y=x^2+x$

よって，頂点 P が描く曲線は，放物線 $y=x^2+x$ である。

式と曲線【曲線の媒介変数表示】　p.57～63

練習２２） 角 θ を媒介変数として，次の円を表せ。

(1)　$x^2+y^2=2^2$　　　　(2)　$x^2+y^2=2$

(解説)

(1)　$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$

(2)　$x=\sqrt{2}\cos\theta$，$y=\sqrt{2}\sin\theta$

練習２３） 角 θ を媒介変数として，次の楕円を表せ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　　　(2)　$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

(解説)

(1)　$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$

(2)　$x=4\cos\theta$，$y=5\sin\theta$

練習２５） 双曲線 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$ を媒介変数 θ を用いて表せ。

(解説)

$x=\dfrac{5}{\cos\theta}$，$y=4\tan\theta$

練習２６）次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $x=3\cos\theta+2$，$y=3\sin\theta-1$

(2) $x=3\cos\theta+1$，$y=2\sin\theta+3$

(解説)

(1) $\sin\theta=\dfrac{y+1}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{x-2}{3}$

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\frac{(y+1)^2}{3^2}+\frac{(x-2)^2}{3^2}=1$$

よって $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

これは，点 $(2,\ -1)$ を中心とする半径 3 の円を表す。

(2) $\sin\theta=\dfrac{y-3}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{x-1}{3}$

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\frac{(y-3)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^2}{3^2}=1$$

よって $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円を表す。

練習２７）半径 3 の円が x 軸上をすべることなく回転していくとき，円上の定点 P の描くサイクロイドの媒介変数表示を求めよ。ただし，点 P の最初の位置を原点 O，円の中心の最初の位置を点 $(0,\ 3)$ とする。

(解説)

$x=3(\theta-\sin\theta)$，$y=3(1-\cos\theta)$