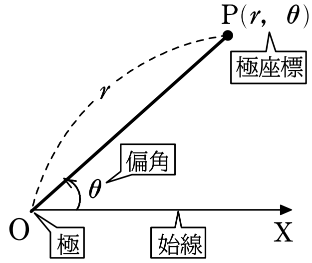
式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

□極座標と直交座標

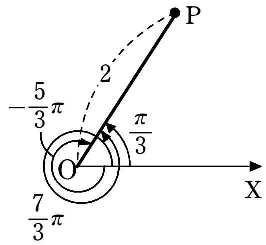
　これまで平面上の点の座標は x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ で表してきた。ここでは，平面上の点の座標の別な表し方について考えてみよう。



　平面上に点 O と半直線 OX を定めると，この平面上の点 P の位置は，OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ の大きさで決まる。ただし，θ は弧度法で表された一般角である。
このとき，2 つの数の組 $(r,\ \theta)$ を，点 P の **極座標** という。
極座標が $(r,\ \theta)$ である点 P を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ と書くことがある。
また，点 O を **極**，半直線 OX を **始線**，θ を **偏角** という。
極 O と異なる点 P の偏角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる。なお，θ の範囲を制限しないこともある。

注意　極 O の極座標は $(0,\ \theta)$ とし，θ は任意の値と考える。

　極座標が与えられると，その点はただ 1 つに定まる。しかし，ある 1 つの点が与えられたとき，その点の極座標は 1 通りには定まらない。



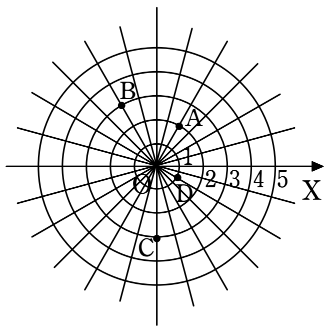
　例えば，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{7}{3}\pi$，$-\dfrac{5}{3}\pi$ などの角の動径は一致するから，極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(2,\ \dfrac{7}{3}\pi\right)$，$\left(2,\ -\dfrac{5}{3}\pi\right)$ である点は同じ点を表す。

　一般に，極座標では，n を整数とするとき，
$(r,\ \theta)$ と $(r,\ \theta+2n\pi)$ は同じ点を表すから，ある点 P の極座標は 1 通りには定まらない。
　しかし，極 O と異なる点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ は，例えば，θ の値の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ と制限すると，ただ 1 通りに定まる。

例）　極座標で表された 4 点

$\mathrm{A}\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(3,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$，$\mathrm{C}\left(3,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$，$\mathrm{D}\left(1,\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$

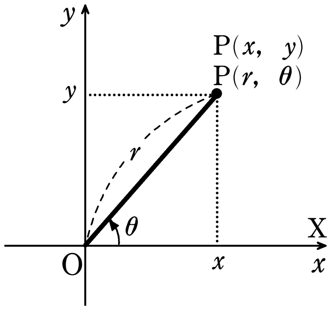
を図示すると，右の図のようになる。　終



（大きさ・距離，偏角）

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

□極座標と直交座標の関係



極座標に対し，これまで用いてきた x 座標，y 座標の組 $(x,\ y)$ で表した座標を **直交座標** という。座標平面において極座標を考える場合，普通，原点 O を極，x 軸の正の部分を始線とする。この場合，点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ と直交座標 $(x,\ y)$ の間には，次の関係がある。

極座標と直交座標

1　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

2　$r=\sqrt{x^2+y^2}$，　$r\neq 0$ のとき $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

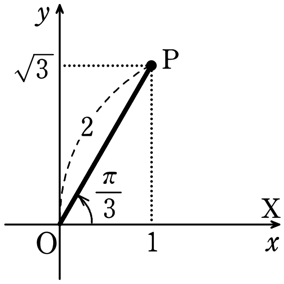
注意　直交座標の原点および x 軸の正の部分が，それぞれ極座標の極，始線となるようにとっている。

例７） 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を求める。

$r=2$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$x=r\cos\theta=2\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

$y=r\sin\theta=2\sin\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$



よって，点 P の直交座標は

$(1,\ \sqrt{3})$　終

例８） 直交座標が $(-\sqrt{3},\ 1)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求める。

$x=-\sqrt{3}$，$y=1$ であるから

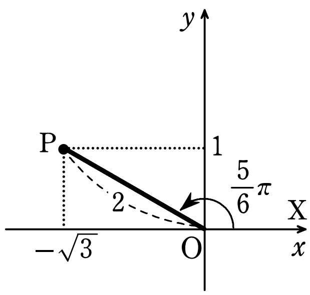
$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}$

$=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{2}$



$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

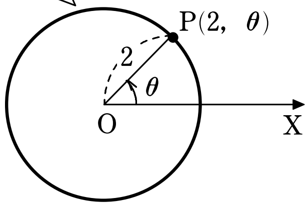
よって，点 P の極座標の 1 つは $\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$　終

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

□極方程式

平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ の方程式 $F(r,\ \theta)=0$ や $r=f(\theta)$ で表されるとき，その方程式をこの曲線の **極方程式** という。

偏角 θ の大きさを変えると円ができあがる



例９） 極 O を中心とする半径 2 の円
この円上の点 P の極座標を
$(r,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{OP}=r$ より
$r=2$，θ は任意の値
よって，この円の極方程式は
$r=2$

偏角 θ に指定がない
⇒触れなくて良い

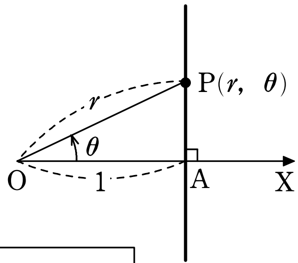
終

注意　「θ は任意の値」は省略している。

例１０） 始線 OX 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線
この直線上の点 P の極座標を
$(r,\ \theta)$ とすると，$\mathrm{OP}\cos\theta=1$ より
$r\cos\theta=1$
よって，この直線の極方程式は

$$r=\frac{1}{\cos\theta}$$

終



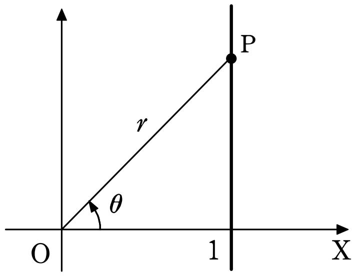
例 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ なので $r=2$

例） 極方程式 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$ は

$r\cos\theta=1$

すなわち　$x=1$ と変形されるから

直線　$x=1$　を表す　終



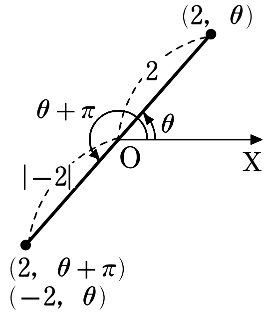
例１０ の極方程式 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$ において，θ の変域を $\cos\theta\neq 0$ であるすべての θ にとると，右辺は負の値をとることもある。この場合，$r<0$ のときの $(r,\ \theta)$ は，極座標が $(|r|,\ \theta+\pi)$ である点を表すと考えることにする。

たとえば，例１０ の極方程式を満たす $(-1,\ \pi)$ は点 $(1,\ 2\pi)$ を表す。

以下，極方程式においては，$r<0$ の極座標の点も考える。

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

極方程式においては，$r<0$ の極座標の点も考える。
すなわち，$r>0$ のとき，極座標が $(-r,\ \theta)$ である点は，
極座標が $(r,\ \theta+\pi)$ である点と考える。
例えば，$(-2,\ \theta)$ と $(2,\ \theta+\pi)$ は同じ点を表し，
この点は点 $(2,\ \theta)$ と極 O に関して対称である。



例） 極 O を通り，始線とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直線の極方程式

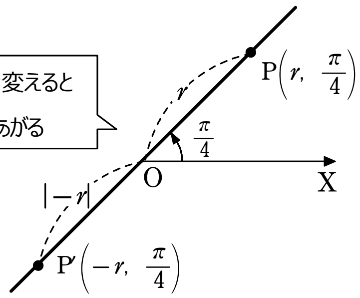
この直線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

r は任意の値，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

よって，この直線の極方程式は

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$ 終

r の大きさを変えると
直線ができあがる

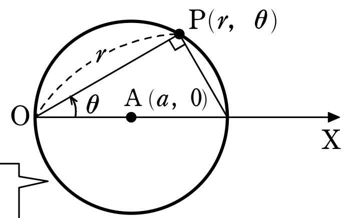


距離 r に制限がない
⇒触れなくて良い

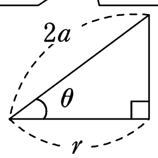
終

注意「r は任意の値」は省略している。

例１２） 中心 A の極座標が $(a,\ 0)$ である半径 a の円
この円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると
$\mathrm{OP}=2\mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{AOP}$
ここで　$\mathrm{OP}=r$
$\mathrm{OA}=a$
$\cos\angle\mathrm{AOP}=\cos\theta$
であるから，
この円の極方程式は
$r=2a\cos\theta$　終

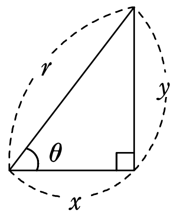


直径の円周角は直角



$$\cos\theta=\frac{r}{2a}$$

一方で　$r=2a\cos\theta$ の両辺に r を掛けると
$r^2=2ar\cos\theta$
$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ より
$x^2+y^2=2ax$
$x^2-2ax+y^2=0$
$(x-a)^2-a^2+y^2=0$
$(x-a)^2+y^2=a^2$　ゆえに　中心 $(a,\ 0)$　半径 a の円であることがわかる



式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

例題７）　極座標が $\left(3,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，OA に垂直な直線 ℓ の極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=3$$ であることを示せ。

解答　直線 ℓ 上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

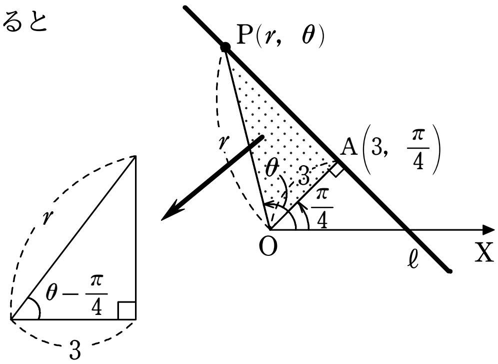
$$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}=\mathrm{OA}$$

ここで　$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{OA}=3$，

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，直線 ℓ の極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=3$$



□直交座標の x，y の方程式と極方程式

直交座標の x，y の方程式で表された曲線を極方程式で表してみよう。

例題８）双曲線 $x^2-y^2=1$ を極方程式で表せ。

解答　双曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

これらを $x^2-y^2=1$ に代入すると

$$r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta=1$$

すなわち　$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$　　←$\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $=\cos2\theta$

よって　$r^2\cos2\theta=1$

次に，極方程式で表された曲線を，直交座標の x，y の方程式で表してみよう。

例題９）次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$$

解答　この曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$r\cos\theta=x,\quad r\sin\theta=y,\quad r^2=x^2+y^2\quad\cdots\cdots①$$

極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の両辺に r を掛けると

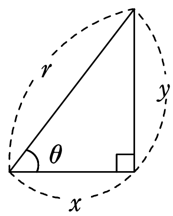
$$r^2=2r(\cos\theta+\sin\theta)$$

すなわち　$r^2=2r\cos\theta+2r\sin\theta$

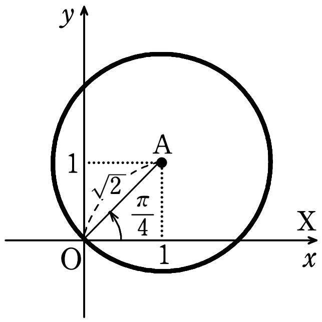
これに ① を代入して r，θ を消去すると

$$x^2+y^2=2x+2y$$

よって　$x^2+y^2-2x-2y=0$



$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
を用いる



例題９で求めた x，y の方程式を変形すると，次のようになる。

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

よって，極方程式

$$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$$

の表す曲線は，点 $\mathrm{A}\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ を中心とし，

極 O を通る円であることがわかる。

補足　$r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ を合成すると，$r=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ となる。

□２次曲線の極方程式

例題１０） 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$$r=\frac{1}{2+\cos\theta}$$

解答　分母を払うと　　$2r+r\cos\theta=1$

$r\cos\theta=x$ を代入すると　　$2r=1-x$

両辺を 2 乗すると　　$4r^2=1-2x+x^2$

$r^2=x^2+y^2$ を代入すると　　$4(x^2+y^2)=1-2x+x^2$

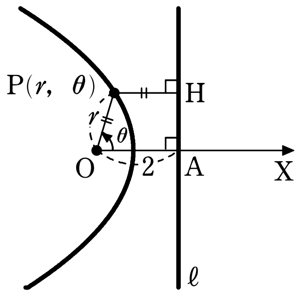
整理して　　$3x^2+4y^2+2x-1=0$

補足　例題１０で求めた x，y の方程式を変形すると $\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+3y^2=1$ となり，

この曲線が楕円であることがわかる。

例題 １１） 始線 OX 上の点 A$(2,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。

極 O を焦点，ℓ を準線とする放物線の極方程式を求めよ。



解答　放物線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，

P から準線 ℓ に下ろした垂線を PH とすると

$$\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$$

が成り立つ。ここで，

$$\mathrm{OP}=r,\ \mathrm{PH}=2-r\cos\theta$$

であるから　　$r=2-r\cos\theta$

よって，求める放物線の極方程式は

$$r=\frac{2}{1+\cos\theta}$$

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

研究　２次曲線を表す極方程式

始線 OX 上の点 A$(a,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，

$$e=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}\quad\cdots\cdots ①$$

の値が一定であるような P の軌跡は，2 次曲線になることが知られている。この e の値は離心率である。

右の図において， $\mathrm{OP}=r$ と ① から

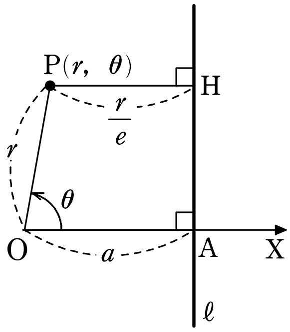
線分 PH の長さを 2 通りに表すと

$$\mathrm{PH}=\frac{r}{e},\ \mathrm{PH}=a-r\cos\theta$$

よって　$\dfrac{r}{e}=a-r\cos\theta$

すなわち　$r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}\quad\cdots\cdots ②$

② が点 P の軌跡を表す極方程式である。



② の表す 2 次曲線は，e のとる値によって，次のように分類される。

[1]　$0<e<1$ のとき

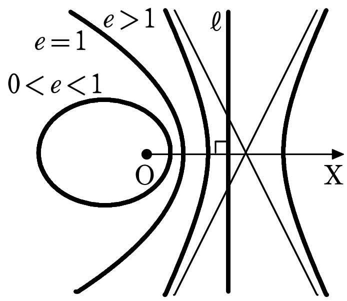
O を焦点の 1 つとする楕円

[2]　$e=1$ のとき

O を焦点，ℓ を準線とする放物線

[3]　$e>1$ のとき

O を焦点の 1 つとする双曲線



式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

練習２８） 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1) $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3) $(3,\ \pi)$

練習２９） 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。
ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $(2,\ 2)$　　(2) $(-1,\ \sqrt{3})$　　(3) $(-\sqrt{3},\ -1)$

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

練習３０） 極座標が$\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$である点 A を通り，始線に平行な直線を，極方程式で表せ。

練習３０） 次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$　　　(2)　$r = 2\cos\theta$

練習３２） 極方程式 $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$ で表される曲線を図示せよ。

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

練習３３） 楕円 $x^2+2y^2=4$ を極方程式で表せ。

練習３４） 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

(1)　$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$　　(2)　$r=2\sin\theta$

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

練習３５） 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$$r=\frac{1}{1+2\cos\theta}$$

練習３６） 始線 OX 上の点 A(2，0) を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。点 P(r，θ) から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるような P の軌跡を，極方程式で表せ。

式と曲線【極座標と極方程式】 p.64～71

練習２８） 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1) $\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$　　(2) $\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$　　(3) $(3,\ \pi)$

(解説)

(1) $r=2$，$\theta=\frac{\pi}{6}$ であるから

$$x=2\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\qquad y=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

よって，求める直交座標は　$(\sqrt{3},\ 1)$

(2) $r=\sqrt{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}$ であるから

$$x=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1\qquad y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$

よって，求める直交座標は　$(1,\ 1)$

(3) $r=3$，$\theta=\pi$ であるから

$$x=3\cos\pi=3\cdot(-1)=-3\qquad y=3\sin\pi=3\cdot0=0$$

よって，求める直交座標は　$(-3,\ 0)$

練習２９） 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。
ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $(2,\ 2)$　　(2) $(-1,\ \sqrt{3})$　　(3) $(-\sqrt{3},\ -1)$

(解説)

(1) $r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{\pi}{4}$

よって，求める極座標は　$\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$

(2) $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

よって，求める極座標は　$\left(2,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

(3) $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$ では　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

よって，求める極座標は　$\left(2,\ \frac{7}{6}\pi\right)$

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64〜71

練習３０） 極座標が$\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$である点 A を通り，始線に平行な直線を，極方程式で表せ。

(解説)

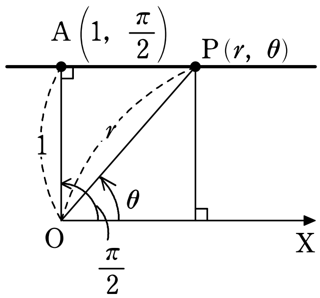
この直線上の点 P の極座標を$(r,\ \theta)$とすると，

$\mathrm{OP}\sin\theta=1$ より

$$r\sin\theta=1$$

よって，この直線の極方程式は

$$r=\frac{1}{\sin\theta}$$



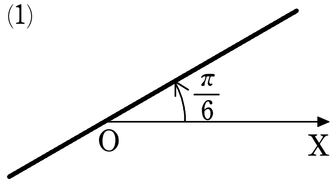
練習３０） 次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

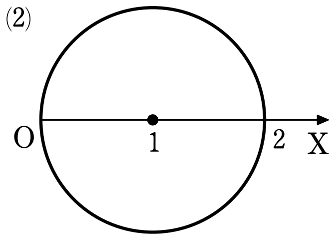
(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$r=2\cos\theta$

(解説)

(1)　極 O を通り，始線 OX と$\dfrac{\pi}{6}$の角をなす直線を表す。

(2)　中心の極座標が$(1,\ 0)$である半径 1 の円を表す。

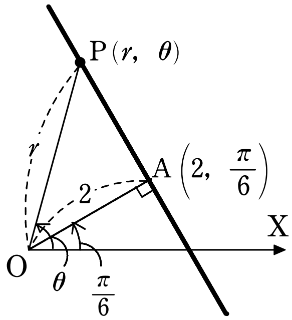




練習３２） 極方程式$r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$で表される曲線を図示せよ。

(解説)

極座標が$\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$である点 A を通り，OA に垂直な直線を表す。



式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

練習３３） 楕円 $x^2+2y^2=4$ を極方程式で表せ。

(解説)

楕円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

これらを $x^2+2y^2=4$ に代入すると　　$r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta=4$

すなわち　$r^2(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)=4$

よって　　$r^2(1+\sin^2\theta)=4$

練習３４） 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

(1)　$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$　　　　(2)　$r=2\sin\theta$

(解説)

(1)　この曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$r\cos\theta=x,\quad r\sin\theta=y \quad \cdots\cdots ①$$

$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ より

$$r(\sin\theta+\cos\theta)=1 \quad \text{すなわち} \quad r\cos\theta+r\sin\theta=1$$

これに ① を代入して r，θ を消去すると

$$x+y=1$$

(2)　この曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$r\sin\theta=y,\quad r^2=x^2+y^2 \quad \cdots\cdots ①$$

極方程式 $r=2\sin\theta$ の両辺に r を掛けると

$$r^2=2r\sin\theta$$

これに ① を代入して r，θ を消去すると

$$x^2+y^2=2y$$

よって　　$x^2+y^2-2y=0$

式と曲線【極座標と極方程式】　p.64～71

練習３５） 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の x，y の方程式で表せ。

$$r=\frac{1}{1+2\cos\theta}$$

(解説)

分母を払うと　$r+2r\cos\theta=1$

$r\cos\theta=x$ を代入すると　$r=1-2x$

両辺を 2 乗すると　$r^2=1-4x+4x^2$

$r^2=x^2+y^2$ を代入すると　$x^2+y^2=1-4x+4x^2$

整理して　$3x^2-y^2-4x+1=0$

練習３６） 始線 OX 上の点 A$(2,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする。点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ であるような P の軌跡を，極方程式で表せ。

(解説)

$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{1}{2}$ より　$2\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$

$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{PH}=2-r\cos\theta$ であるから

$$2r=2-r\cos\theta$$

よって，求める極方程式は　$r=\dfrac{2}{2+\cos\theta}$