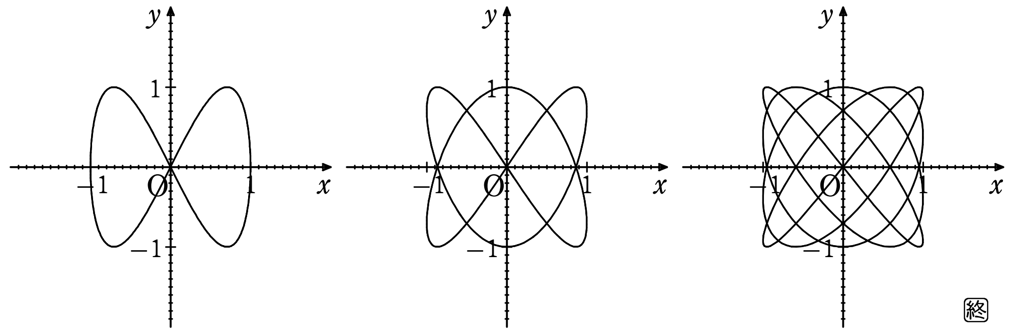
式と曲線【コンピュータの利用】　p.72～73

□媒介変数表示される曲線の描画

グラフ描画機能をもつ数式処理ソフトを利用して，コンピュータでいろいろな曲線を描いてみよう。

例１３） 有理数 a，b に対して，媒介変数表示　$x=\sin at$，$y=\sin bt$　…… ①　において，
a，b が次の値をとるときの曲線を描くと，下の図のようになる。

(1)　$a=1$，$b=2$　　(2)　$a=2$，$b=3$　　(3)　$a=4$，$b=5$



終

補足　有理数 a，b に対して，媒介変数表示　$x=\sin at$，$y=\sin bt$　で表される曲線を
リサージュ曲線 と呼ばれている。

1855年にフランスの物理学者ジュール・アントワーヌ・リサジュー
(J.A. Lissajous, 1822年－1880年) が考案
（最近はリサジュー表記が増えているようすです）

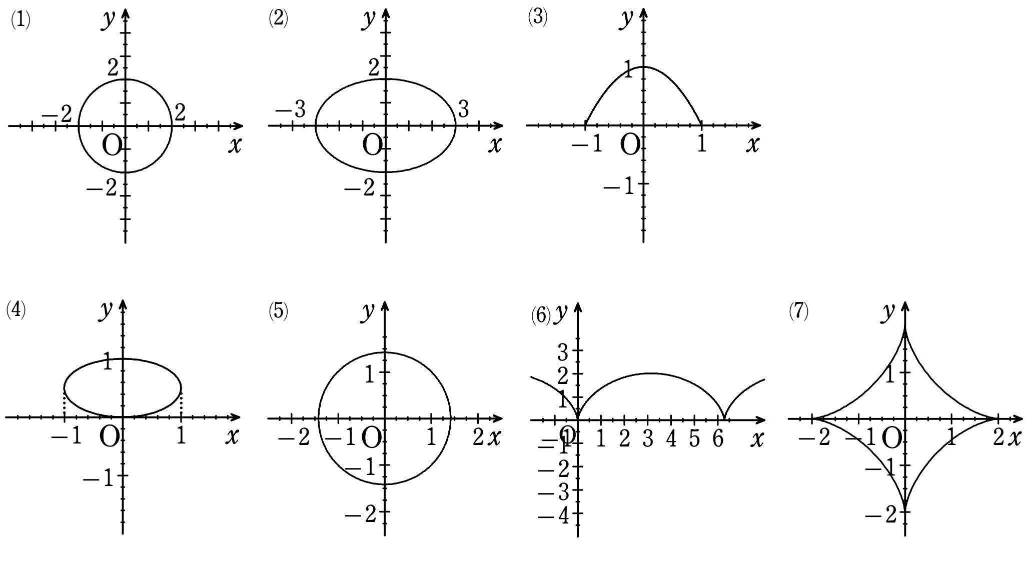
練習３７） 次のように媒介変数表示される曲線をコンピュータで描いてみよう。

(1)　$x=2\cos t$，$y=2\sin t$　　(2)　$x=3\cos t$，$y=2\sin t$　　(3)　$x=\cos t$，$y=\sin^2 t$

(4)　$x=\sin 2t$，$y=\sin^2 t$　　(5)　$x=\sin t-\cos t$，$y=\sin t+\cos t$　　(6)　$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$

(7)　$x=2\cos^3 t$，$y=2\sin^3 t$

解答



式と曲線【コンピュータの利用】　p.72～73

□極方程式で表される曲線の描画

極方程式が与えられたとき，これを満たす $(r,\ \theta)$ を極座標とする点を次々にとって，それらの点の軌跡として曲線を描くことができる。 極方程式 $r=f(\theta)$ で表される曲線については，θ の範囲に注意して描いてみよう。

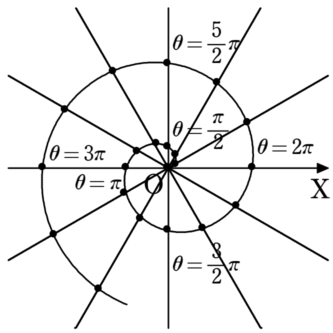
極座標による入力ができない場合は，
媒介変数表示に直してから入力するとよい。

例）　$\theta \geqq 0$ のとき，極方程式 $r=\dfrac{\theta}{2}$ の表す曲線

θ のいろいろな値に対応する r の値は，次の表のようになる。

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π	$\dfrac{7}{6}\pi$	$\dfrac{4}{3}\pi$	$\dfrac{3}{2}\pi$	……
r	0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{5}{12}\pi$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{7}{12}\pi$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\dfrac{3}{4}\pi$	……

これらの値の組 $(r,\ \theta)$ を極座標にもつ点をとっていくと，それらの点は右の図のような曲線上にある。

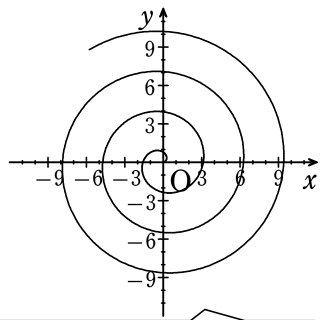


極方程式 $r=\dfrac{\theta}{2}$ $(\theta \geqq 0)$ で表される曲線をコンピュータで描くと，右の図のようになる。

一般に，$a>0$ のとき，極方程式

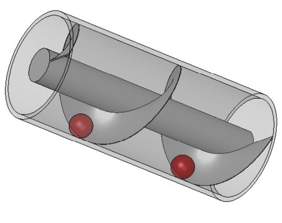
$$r=a\theta \quad (\theta \geqq 0)$$

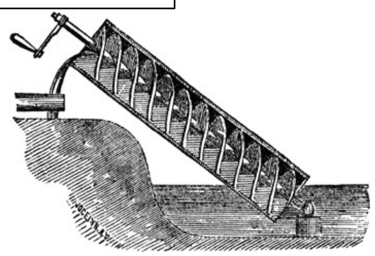
で表される曲線を，**アルキメデスの渦巻線** という。



アルキメディアン・スクリュー（Archimedean screw）とも言う。
ポンプ、スクリューの一種で管の内部に螺旋があり、回転する事で連続的に上方へ移動させる。効率は低いが、粘性のある液体の搬送にも適している。上部から水を通すことで得られるシャフト（軸）の回転を利用したマイクロ水力発電にも活用されている。

極方程式で表される曲線の表示画面を，
座標平面の場合と同じにしている。



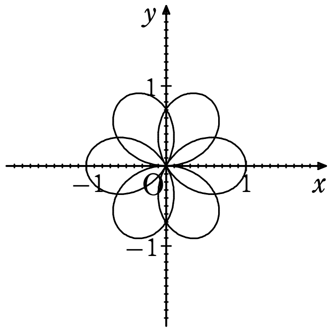


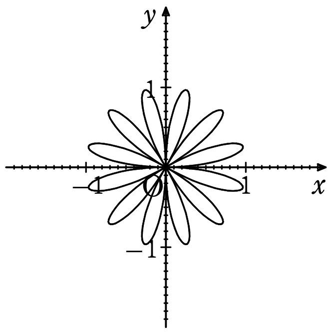
式と曲線【コンピュータの利用】　p.72～73

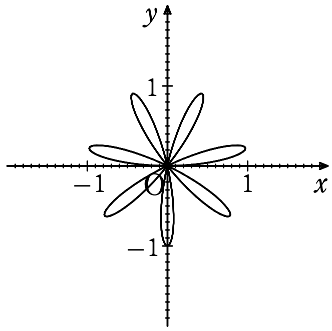
a を有理数とするとき，極方程式 $r=\sin a\theta$ で表される曲線を **正葉曲線** という。正葉曲線は，a の値によって次のようになる。

バラ曲線とも言う

(1)　$a=1.5$　　(2)　$a=6$　　(3)　$a=7$





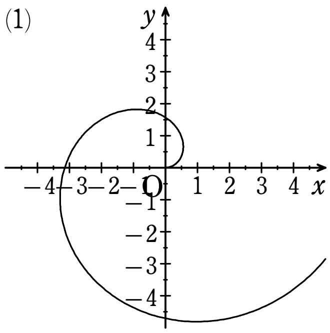


練習３８） 次のような極方程式で表される曲線をコンピュータで描いてみよう。

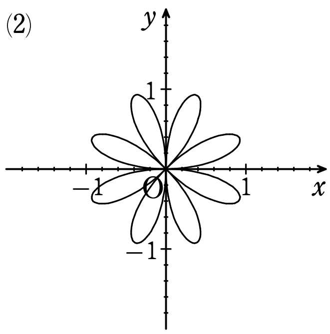
ただし，$\theta \geqq 0$ とする。

(1)　$r=\theta$　　(2)　$r=\sin 4\theta$　　(3)　$r=2(1+\cos\theta)$

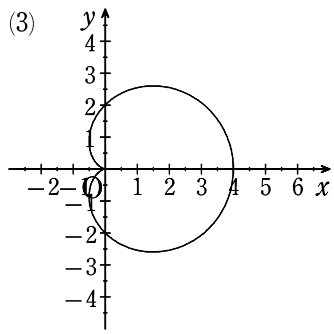
(1)



(2)



(3)



極方程式 $r=a+b\cos\theta$ で表される曲線を **リマソン** という。

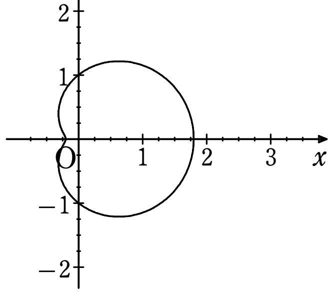
蝸牛形やパスカルの蝸牛形ともいう。
（蝸牛とはかたつむりのこと）

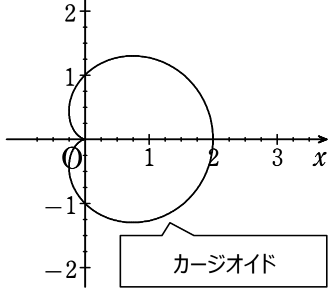
特に，$a=b$ のとき，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ で表される曲線を **カージオイド** という。

心臓形ともいう。外サイクロイドの一種でもある。

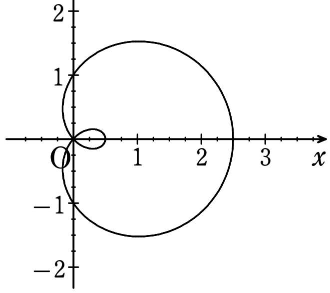
リマソンは，a，b の値によって，次のようになる。

$a=1$，$b=0.8$　　$a=1$，$b=1$　　$a=1$，$b=1.5$





カージオイド



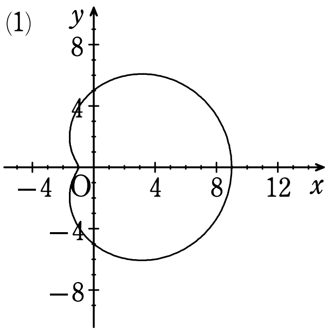
式と曲線【コンピュータの利用】　p.72～73

練習） a，b が次の値をとるとき，極方程式 $r=a+b\cos\theta$ で表される曲線を，コンピュータで描け。

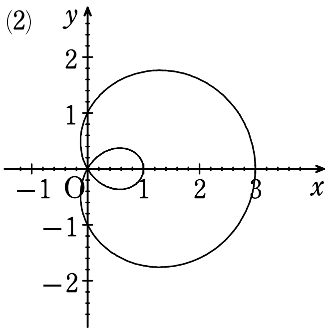
(1)　$a=5$，$b=4$　　　　(2)　$a=1$，$b=2$

解答

(1)



(2)



$a>0$ とする。

2 定点 A$(-a,\ 0)$，B$(a,\ 0)$ からの距離の積が a^2 に等しい点 P の軌跡を**レムニスケート**という。

連珠形（れんじゅけい）とも呼ばれる。また，ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケートとも呼ばれる。
カッシーニの卵形線
$(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)-(a^4-b^4)=0$
の $a=b$ のときと見なすことができる。

(1)　P$(x,\ y)$ とする。

PA・PB$=a^2$ から　　PA^2・PB$^2=a^4$　……①

① の左辺$=\{(x+a)^2+y^2\}\{(x-a)^2+y^2\}$

$=(x^2+y^2+a^2+2ax)(x^2+y^2+a^2-2ax)$

$=(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2$

① から　　$\{(x^2+y^2)+a^2\}^2=4a^2x^2+a^4$

よって　　$(x^2+y^2)^2+2a^2(x^2+y^2)+a^4=4a^2x^2+a^4$

ゆえに　　$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$

よって，レムニスケートの方程式は，次の式で与えられる。

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$$

(2)　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とすると

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x^2-y^2=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=r^2\cos2\theta$$

(1) の結果に代入して

$$r^4=2a^2r^2\cos2\theta$$

$r^2(r^2-2a^2\cos2\theta)=0$ から

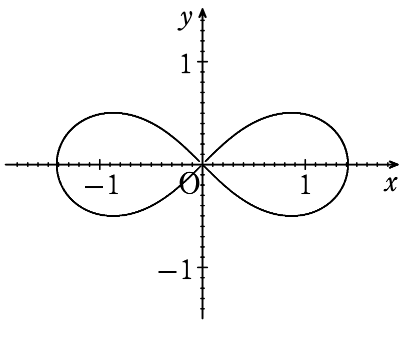
$r=0$　　または　　$r^2=2a^2\cos2\theta$

$r=0$ は $r^2=2a^2\cos2\theta$ に含まれるから，

求める方程式は

$$r^2=2a^2\cos2\theta$$

$a=1$ のときのグラフは右の図のようになる。



式と曲線【コンピュータの利用】　p.72～73

COLUMN　ミルクティーを照らす光

媒介変数 θ を用いて表された半径 1 の円

$$x=\cos\theta\ ,\ \ y=\sin\theta$$

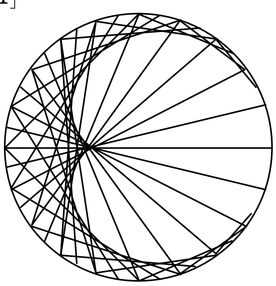
を考える。

この円上の 2 点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を結ぶ線分を，0 から 2π まで θ を動かして複数個描くと，図 [1] のようになる。

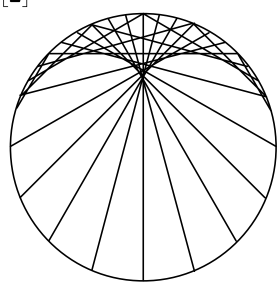
また，円上の 2 点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と $(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ を結ぶ線分を，0 から π まで θ を動かして複数個描くと，図 [2] のようになり，例１２の OP を直径とする円を，$-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ まで θ を動かして複数個描くと，図 [3] のようになる。

いずれも，カージオイドのような図形が浮かび上がってくる。実際，[1] と [3] では，θ を動かしたときの線分や円が 1 つのカージオイドに接していることが知られている。

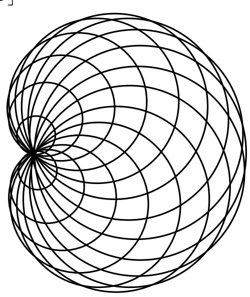
[1]



[2]



[3]



点 $(1,\ 0)$ を通る光線が点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で円に当たって反射すると，

その後は点 $(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ に向かうが，その反射後の光線の図が [1] である。

[2] は，y 軸に平行に入ってきた光が半円で反射した後の光線の図である。

カップに入ったミルクティーに光が当たると，
カージオイドのような図形が見えることがある。
光線は 1 点には集まらないが，
光線の密集しているところが明るくなるためで，
実験して確かめることができる。