微分法【微分法の基本】　p.142～145

【内容目標】微分法の基本をおさえて計算できるようになろう。

□導関数の計算

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ **を** x **で微分する** または単に **微分する** という。

導関数の公式（１～３は，数学Ⅱで学んだものと同じ）

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

1　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　ただし，k は定数　　2　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

4　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

積の微分法

これを使うと展開しなくてもＯＫ

(**微分**)×(**そのまま**)＋(**そのまま**)×(**微分**)

商の微分法の関係で順番は変えない方が良い

【４の証明】

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)\boxed{-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}-f(x)g(x)}{h}$$

□の中で帳尻合わせ

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\quad \lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　$\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$

よって　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　　終

□関数 x^n の導関数

＊ 二項定理を利用して証明することができる

（教科書参照）

x^n の導関数（数Ⅱのおさらい）

n が自然数のとき　　$(x^n)'=nx^{n-1}$

また，c を定数とするとき，$(c)'=0$ である。

例題１）　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=2x^5-5x^4$　　　(2)　$y=(x^2-3)(4x^2+5)$

解答　(1)　$y'=2\cdot5x^4-5\cdot4x^3=10x^4-20x^3$

(**微分**)×(**そのまま**)＋(**そのまま**)×(**微分**)

(2)　$y'=(x^2-3)'(4x^2+5)+(x^2-3)(4x^2+5)'$

$=2x(4x^2+5)+(x^2-3)\cdot8x$

$=8x^3+10x+8x^3-24x$

$=16x^3-14x$

いずれか１つの項が微分されたものの和

⇩

参考　３つでも同じ考え方で

$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$

となる。

微分法【微分法の基本】 p.142～145

□商の微分法

商の導関数については，次の公式が成り立つ。

商の導関数（**商の微分法**）

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

とくに $f(x)=1$ とすると $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\{(g(x)^{-1})\}'$ とみると

$\{(g(x))^{-1}\}'=-\{g(x)\}^{-2}\times g'(x)$

$=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

※合成関数の微分はのちほど

商（分数型）の微分は

積の微分法は ＋

商の微分法は －

$$\frac{(\text{分子の微分})\times(\text{分母})-(\text{分子})\times(\text{分母の微分})}{(\text{分母})^2}$$

(**微分**)×(**そのまま**)－(**そのまま**)×(**微分**)

例題２） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\frac{1}{3x+2}$　　(2) $y=\frac{3x}{x^2-1}$

(解説)

(1) $y'=-\frac{(3x+2)'}{(3x+2)^2}$

$=-\frac{3}{(3x+2)^2}$

(2) $y'=\frac{(3x)'(x^2-1)-3x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

$=\frac{3(x^2-1)-3x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$

$=\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}$

$=-\frac{3x^2+3}{(x^2-1)^2}$

(**微分**)×(**そのまま**)－(**そのまま**)×(**微分**)

□関数 $x^{\bigcirc}$ の導関数（拡張）

$x^{\bigcirc}$ の導関数　○ が**整数**でも**有理数**でも**実数**でも　$(x^{\bigcirc})'=\bigcirc x^{\bigcirc-1}$

例４） 次の関数を微分せよ。

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

単項式の形なら

指数で処理に

練習６） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^5+2x^4$

(2)　$y=3x^6-4x^3$

(3)　$y=(x+1)(x^3-4x)$

(4)　$y=(3x^2-2)(x^2+x+1)$

練習８） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2x-3}$

(2)　$y=\dfrac{x}{x^2-2}$

(3)　$y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

微分法【微分法の基本】　p.142～145　練習問題

練習９） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$y=-\dfrac{4}{x^2}$　　(3)　$y=\dfrac{1}{3x^3}$

補題） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt[3]{x^2}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

微分法【微分法の基本】　p.142～145　練習問題

練習６） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^5+2x^4$　　(2)　$y=3x^6-4x^3$

(3)　$y=(x+1)(x^3-4x)$　　(4)　$y=(3x^2-2)(x^2+x+1)$

(解説)

(1)　$y'=5x^4+2\cdot 4x^3=5x^4+8x^3$

(2)　$y'=3\cdot 6x^5-4\cdot 3x^2=18x^5-12x^2$

(3)　$y'=(x+1)'(x^3-4x)+(x+1)(x^3-4x)'$

$=1\cdot(x^3-4x)+(x+1)(3x^2-4)$

$=x^3-4x+3x^3-4x+3x^2-4$

$=4x^3+3x^2-8x-4$

(4)　$y'=(3x^2-2)'(x^2+x+1)+(3x^2-2)(x^2+x+1)'$

$=6x(x^2+x+1)+(3x^2-2)(2x+1)$

$=6x^3+6x^2+6x+6x^3+3x^2-4x-2$

$=12x^3+9x^2+2x-2$

練習８） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{2x-3}$　　(2)　$y=\dfrac{x}{x^2-2}$　　(3)　$y=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

(解説)

(1)　$y'=-\dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

(2)　$y'=\dfrac{(x)'(x^2-2)-x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^2-2)-x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$

$=-\dfrac{x^2+2}{(x^2-2)^2}$

(3)　$y'=\dfrac{(2x-1)'(x^2+1)-(2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-(2x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

微分法【微分法の基本】　p.142～145　練習問題

練習９） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$y=-\dfrac{4}{x^2}$　　(3)　$y=\dfrac{1}{3x^3}$

(解説)

(1)　$y'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

(2)　$y'=(-4x^{-2})'=-4\cdot(-2)x^{-2-1}=8x^{-3}=\dfrac{8}{x^3}$

(3)　$y'=\dfrac{1}{3}(x^{-3})'=\dfrac{1}{3}\cdot(-3)x^{-3-1}=-x^{-4}=-\dfrac{1}{x^4}$

補題） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt[3]{x^2}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(解説)

解答　(1)　$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(2)　$y'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$