微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】 p.146～149

【内容目標】合成関数の微分法は絶対にマスターしよう。

□合成関数の微分法

合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u の関数として微分可能，$u=g(x)$ が x の関数として微分可能であるとする。このとき，合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ $\leftarrow \frac{d○}{d△}$ は ○ を △ で微分

$\frac{dy}{dx}=\{f(g(x))\}'$，

$\frac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$，

$\frac{du}{dx}=g'(x)$ と表すと，

$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

証明 u の関数 $y=f(u)$，x の関数 $u=g(x)$ がともに微分可能なとき，

x の増分 Δx に対する u の増分を Δu，　u の増分 Δu に対する y の増分を Δy

とすると $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$

$\frac{dy}{dx}$ で1つの記号であるが、分数のように見ると約分の話 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\cancel{du}}\cdot\frac{\cancel{du}}{dx}$

$u=g(x)$ は連続であるから，$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき $g(x+\Delta x) \longrightarrow g(x)$

$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ であるから，$\Delta x \longrightarrow 0$ のとき $\Delta u \longrightarrow 0$ である。

よって $$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

例題） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x^3+x+1)^4$

$u=x^3+x+1$ とすると $y=u^4$

丁寧に書くと…

「$y=x^4$ だったらいいのにな…」と思って微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot(3x^2+1)=\boxed{4(x^3+x+1)^3}\boxed{(3x^2+1)}$$

置き換えたもの（ x^3+x+1 ）の微分

(2) $y=\frac{1}{(2x+1)^3}$

$u=2x+1$ とすると $y=\frac{1}{u^3}$ すなわち $y=u^{-3}$

丁寧に書くと…

「$y=x^{-3}$ だったらいいのにな…」と思って微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\boxed{-3u^{-4}}\cdot\boxed{2}=-\frac{6}{(2x+1)^4}$$

置き換えたもの（ $2x+1$ ）の微分

(3) $y=(3x^2-2)^5$

「$y=x^5$ だったらいいのにな…」と思って微分

$y=\boxed{}^5$ について

$y'=5\boxed{}^4\cdot(\boxed{})'$

$$y'=\boxed{5(3x^2-2)^4}\cdot\boxed{(3x^2-2)'}$$

$$=5(3x^2-2)^4\cdot 6x=30x(3x^2-2)^4$$

置き換えたもの（ $3x^2-2$ ）の微分

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】 p.146～149

練習１２） 微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$ ただし，a，b は定数

(2) $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^n=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$ ただし，n は整数

解説

(1) $y=f(ax+b)$，$u=ax+b$ とおくと

置き換えるものが１次式のときの話

$y=f(u)$，$\dfrac{dy}{du}=f'(u)$，$\dfrac{du}{dx}=a$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=f'(u)\cdot a=af'(ax+b)$

(2) $y=\{g(x)\}^n$，$u=g(x)$ とおくと

$y=u^n$，$\dfrac{dy}{du}=nu^{n-1}$，$\dfrac{du}{dx}=g'(x)$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=nu^{n-1}\cdot g'(x)=n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$

□逆関数の微分法

逆関数の微分法 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

逆数の関係

$\dfrac{dy}{dx}$ で１つの記号であるが、

分数のように見ると逆数の話

$\dfrac{dy}{dx}=1\div\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

証明 一般に，関数 $f(x)$，$g(x)$ が互いに逆関数で，

ともに微分可能であるとする。$y=f(x)$ を x について解くと $x=g(y)$

この両辺を x で微分すると $1=\dfrac{d}{dx}g(y)$

すなわち $1=\dfrac{d}{dy}g(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$

合成関数の微分

ここで，$g(y)=x$ であるから $1=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ ゆえに $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

例８） 関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の式を x について解くと $x=y^4$ …… ①である。

① の右辺を x で微分すると

$\dfrac{d}{dx}y^4=\dfrac{d}{dy}y^4\cdot\dfrac{dy}{dx}=4y^3\dfrac{dy}{dx}$ ← 合成関数の微分法

であるから，① の両辺を x で微分すると

$1=4y^3\dfrac{dy}{dx}$

よって，関数 $y=\sqrt[4]{x}$ の導関数は，次のようになる。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4y^3}=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

別解

$y=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$ なので

$y'=\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

$=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】　p.146～149

□ $x^{\frac{m}{n}}$ の導関数

n が正の整数であるとき，関数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ の導関数は，逆関数の微分法を用いて，次のようにして求められる。

↓ 逆関数の微分法

問１５）　$y=x^{\frac{1}{n}}$ を x について解くと　$x=y^n$　よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{ny^{n-1}}$

ここで　$\dfrac{1}{y^{n-1}}=\dfrac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\dfrac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}=x^{\frac{1}{n}-1}$

したがって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$　すなわち　$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

上の結果は，すでに学んだ導関数の公式　$(x^n)'=nx^{n-1}$において，

指数 n を $\dfrac{1}{n}$ におき換えたものであることがわかる。

例題）次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt{x^3}$　(2)　$y=\sqrt[4]{2x-3}$　(3)　$y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$

解説

(1)　$y=\sqrt{x^3}$ は $y=x^{\frac{3}{2}}$ と表されるから　単項式の形なら指数で処理に

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(2)　$y=\sqrt[4]{2x-3}$ は $y=(2x-3)^{\frac{1}{4}}$ と表されるから

$$y'=\left\{(2x-3)^{\frac{1}{4}}\right\}'$$

「 だったらいいのにな…」と思って微分

$$=\boxed{\frac{1}{4}(2x-3)^{\frac{1}{4}-1}}\cdot\boxed{(2x-3)'}$$

置き換えたものの微分

$$=\frac{1}{4}(2x-3)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-3)^3}}$$

(3)　$y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$ は $y=(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$ と表されるから

$$y'=\left\{(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}\right\}'$$

「 だったらいいのにな…」と思って微分

$$=\boxed{\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1}}\cdot\boxed{(x^2+x+1)'}$$

置き換えたものの微分

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+1)$$

$$=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

練習１０） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+1)^4$

(2) $y=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$

練習１１） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(2x^2+5)^4$

(2) $y=(1-2x^2)^3$

(3) $y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】　練習問題

練習１４） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$　　(2)　$y=\sqrt[3]{x^2}$　　(3)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

練習１５） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$　　(2)　$y=\sqrt{4-x^2}$

練習１０） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x+1)^4$　　(2)　$y=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$

解説

(1)　$y'=4(3x+1)^3\cdot(3x+1)'$

$=4(3x+1)^3\cdot 3$

$=12(3x+1)^3$

(2)　$y=(4x+3)^{-2}$ であるから

$y'=-2(4x+3)^{-3}\cdot(4x+3)'$

$=-2(4x+3)^{-3}\cdot 4$

$=-\dfrac{8}{(4x+3)^3}$

別解　(1)　$u=3x+1$ とすると $y=u^4$ であり　$\dfrac{dy}{du}=4u^3,\quad \dfrac{du}{dx}=3$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=4u^3\cdot 3=12(3x+1)^3$

(2)　$u=4x+3$ とすると $y=u^{-2}$ であり　$\dfrac{dy}{du}=-2u^{-3},\quad \dfrac{du}{dx}=4$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-2u^{-3}\cdot 4=-8u^{-3}=-\dfrac{8}{(4x+3)^3}$

練習１１） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(2x^2+5)^4$　　(2)　$y=(1-2x^2)^3$　　(3)　$y=\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

解説

(1)　$y'=4(2x^2+5)^3\cdot(2x^2+5)'$

$=4(2x^2+5)^3\cdot 4x$

$=16x(2x^2+5)^3$

(2)　$y'=3(1-2x^2)^2\cdot(1-2x^2)'$

$=3(1-2x^2)^2\cdot(-4x)$

$=-12x(1-2x^2)^2$

(3)　$y=(x^2+1)^{-3}$ であるから

$y'=-3(x^2+1)^{-4}\cdot(x^2+1)'$

$=-3(x^2+1)^{-4}\cdot 2x$

$=-\dfrac{6x}{(x^2+1)^4}$

微分法【合成関数の微分法・逆関数の微分法】　練習問題

練習１４） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$　　(2)　$y=\sqrt[3]{x^2}$　　(3)　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(解説)

(1)　$y'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2)　$y'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(3)　$y'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

練習１５） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}$　　(2)　$y=\sqrt{4-x^2}$

(解説)

(1)　$y'=\left\{(x+1)^{\frac{2}{3}}\right\}'=\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(x+1)'=\dfrac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 1$

$=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

(2)　$y'=\left\{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2)'=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$