微分法【対数関数の導関数】　p.154～157

【内容目標】対数関数・指数関数の微分をマスターしよう。

□対数関数の導関数

a は 1 でない正の定数とする。微分係数の定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\boxed{\frac{x}{h}}\log_a\left(1+\boxed{\frac{h}{x}}\right)\right\}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\boxed{\frac{h}{x}}\right)^{\boxed{\frac{x}{h}}}$$

ここで，$\boxed{\frac{h}{x}}=k$ とおくと，

$h\longrightarrow 0$ のとき $k\longrightarrow 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}\quad\cdots\cdots ①$$

0 に近い k の値について，$(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値は，次の表のようになる。

k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$	k	$(1+k)^{\frac{1}{k}}$
0.1	2.593742……	-0.1	2.867971……
0.01	2.704813……	-0.01	2.731999……
0.001	2.716923……	-0.001	2.719642……
0.0001	2.718145……	-0.0001	2.718417……
0.00001	2.718268……	-0.00001	2.718295……

この表から，$k\longrightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくと予想される。また，実際に極限値をもつことが知られている。この極限値を e で表す。

$$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$　でも表される。

∞ に近付く

$(1+\square)^{\blacksquare}$

0 に近付く

e は次のような数で，無理数であることが知られている。

$$e=2.71828182845\cdots\cdots$$

正の定数 e を用いると，① から次が成り立つ。

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log_e a}$$

$\log_a e=\frac{\log_e e}{\log_e a}$，$\log_e e=1$

とくに，対数の底が e のときは，次のようになる。

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

e を底とする対数を　自然対数 という。微分法や積分法では $\log_e x$ の底 e を省略して $\log x$ と書くことが多く，自然対数を単に対数ということもある。

e を「自然対数の底」や「ネイピア数」と呼ぶ

以上をまとめると，次のようになる。

対数関数の導関数

$$(\log x)'=\frac{1}{x}\qquad\qquad(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$$

微分法【対数関数の導関数】 p.154～157

例題４改） 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log 2x$　　(2) $y=\log_2(2x+3)$　　(3) $y=x\log_2 3x$

$2x$ がx だったらいいのにな

$2x+3$ がx だったらいいのにな

積の微分法

＆

$3x$ がx だったらいいのにな

解答 (1) $y'=\dfrac{1}{2x}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$

(2) $y'=\dfrac{1}{(2x+3)\log 2}\cdot(2x+3)'$

$=\dfrac{2}{(2x+3)\log 2}$

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

(3) $y'=(x)'\cdot\log_2 3x+x(\log_2 3x)'$

$=1\cdot\log 3x+x\cdot\dfrac{1}{3x\log 3}\cdot(3x)'$

$=\log 3x+\dfrac{1}{\log 3}$

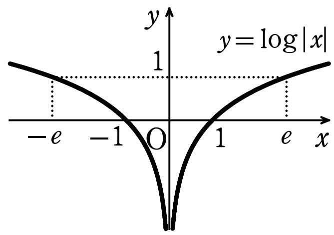
対数関数の導関数を用いて，関数 $\log|x|$ の導関数を求めてみよう。

$x>0$ のとき　$(\log|x|)'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

$x<0$ のとき　$(\log|x|)'=\{\log(-x)\}'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{1}{x}$

したがって，関数 $\log|x|$ の導関数は，次の式で表される。

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$$



練習２０） $(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$ であることを示せ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

$x>0$ のとき　$(\log_a|x|)'=(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$x<0$ のとき　$(\log_a|x|)'=\{\log_a(-x)\}'=\dfrac{1}{-x\log a}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

よって　$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

以上をまとめると，次のようになる。

絶対値を含む対数関数の導関数

$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$　　　$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

微分法【対数関数の導関数】　p.154～157

例題５＋α） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log|\cos x|$　　(2)　$y=\log_3|x^2-1|$

(3)　$y=\log_{10}|2x|$　　(4)　$y=\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(解説)

(1)　$y'=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

(2)　$y'=\dfrac{1}{(x^2-1)\log 3}\cdot(x^2-1)'=\dfrac{2x}{(x^2-1)\log 3}$

(3)　$y'=\dfrac{1}{2x\log 10}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{2x\log 10}=\dfrac{1}{x\log 10}$

$\log_a M\times N=\log_a M+\log_a N$

別解　$y=\log_{10}2+\log_{10}|x|$ であるから　$y'=\dfrac{1}{x\log 10}$

(4)　$y=\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\log|x-1|-\log|x+1|$ であるから

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$$y'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

□**対数微分法**　～　両辺の自然対数をとって微分する方法　　$(\log|y|)'=\dfrac{y'}{y}$

応用例題１）　$\log|y|$ の導関数を利用して，関数 $y=\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$ を微分する。

解答　両辺の絶対値の自然対数をとると

$\log_a M\times N=\log_a M+\log_a N$

$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$$\log|y|=\left|\log\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$$

$$=\log|x-1|+3\log|x+3|-4\log|x+2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+2}$$

通分

$$=\frac{(x+3)(x+2)+3(x-1)(x+2)-4(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

$$=\frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}$$

両辺に $y=\dfrac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$ をかけて

$$y'=\frac{12}{(x-1)(x+3)(x+2)}\cdot\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{12(x+3)^2}{(x+2)^5}$$

微分法【指数関数の導関数】　p.158～159

□指数関数の導関数

a は1でない正の定数とする。指数関数 $y=a^x$ の導関数を調べよう。

○逆関数の微分法と対数関数の導関数の公式の利用

$y=a^x$ をxについて解くと　$x=\log_a y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y\log a}}=y\log a$$

$y=a^x$ 代入

よって　$(a^x)'=a^x\log a$

また、

$y=e^x$ を x について解くと　$x=\log y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y$$

$y=e^x$ 代入

よって　$(e^x)'=e^x$

○対数微分法の利用

$y=a^x$ の両辺の対数をとると

$\log y=\log a^x$

$\log y=x\log a$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\log a$$

よって　$y'=y\cdot\log a$

$\therefore$　$(a^x)'=a^x\log a$

とくに　$a=e$ とすると

$(e^x)'=e^x\log e$

ゆえに　$(e^x)'=e^x$

以上をまとめると，次のようになる。

指数関数の導関数

$(e^x)'=e^x$　　　$(a^x)'=a^x\log a$

次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

(1)　$y=e^{2x}$　　(2)　$y=a^{-2x}$　　(3)　$y=xa^x$

解答　(1)　$y'=e^{2x}\cdot(2x)'$　　$2x$ がx だったらいいのにな

$=2e^{2x}$

(2)　$y'=a^{-2x}\log a\cdot(-2x)'$　　$-2x$ がx だったらいいのにな

$=-2a^{-2x}\log a$

(3)　$y'=(x)'a^x+x(a^x)'$　　積の微分法 「微分そのまま＋そのまま微分」

$=1\cdot a^x+x\cdot a^x\log a$　　a^x でくくっておく

$=a^x(1+x\log a)$

研究　指数関数　$y=a^x$　のグラフと e の関係

ここでは，e と指数関数 $y=a^x$ のグラフとの関係について調べてみよう。

a は 1 でない正の定数とする。

右の図は，いろいろな a の値における $y=a^x$ のグラフで

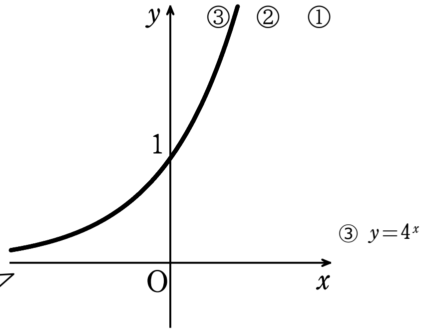
① $y=2^x$ $(a=2)$

② $y=3^x$ $(a=3)$

③ $y=4^x$ $(a=4)$

である。

a の値にかかわらず
どのグラフでも点(0, 1)を
通る



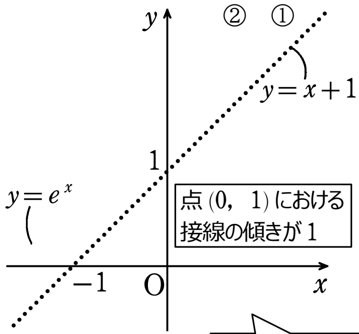
$f(x)=a^x$ とすると，$f'(0)$ は $y=a^x$ のグラフ上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きを表す。

$f'(x)=a^x\log a$ であるから

$$f'(0)=a^0\log a$$
$$=\log a$$

となり，次が成り立つ。

$$f'(0)=1 \iff \log a=1$$
$$\iff a=e^1$$
$$\iff a=e$$
$$\iff f(x)=e^x$$



接線の傾きが
1となる a の値 e が
$2<e<3$ の間にある

よって，指数関数 $y=a^x$ のグラフ上の点 $(0,\ 1)$ における接線の傾きが 1 となるような a の値が e であることがわかる。

$e=2.71828182845\cdots\cdots$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】　練習問題

練習１９） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log 3x$　　(2)　$y=\log_2(4x-1)$

(3)　$y=\log(x^2+1)$　　(4)　$y=x\log x-x$

練習２１） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log|3x+2|$　　(2)　$y=\log|\sin x|$　　(3)　$y=\log_2|x^2-4|$

練習２２） $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$　　(2)　$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】　練習問題

問題９） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$　　(2)　$y=(x-1)^2\cdot\sqrt[3]{x+2}$

練習２５） 次の関数を微分せよ。ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする。

(1)　$y=e^{2x}$　　(2)　$y=e^{-x^2}$　　(3)　$y=3^x$

(4)　$y=2^{-3x}$　　(5)　$y=xe^x$　　(6)　$y=(2x-1)a^x$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】　練習問題

練習１９） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log 3x$　　(2)　$y=\log_2(4x-1)$

(3)　$y=\log(x^2+1)$　　(4)　$y=x\log x-x$

解説

(1)　$y'=\dfrac{1}{3x}\cdot(3x)'=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$　　(2)　$y'=\dfrac{1}{(4x-1)\log 2}\cdot(4x-1)'=\dfrac{4}{(4x-1)\log 2}$

(3)　$y'=\dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$　　(4)　$y'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1$

$$=\log x+1-1$$
$$=\log x$$

練習２１） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log|3x+2|$　　(2)　$y=\log|\sin x|$　　(3)　$y=\log_2|x^2-4|$

解説

(1)　$y'=\dfrac{1}{3x+2}\cdot(3x+2)'=\dfrac{3}{3x+2}$　　(2)　$y'=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

(3)　$y'=\dfrac{1}{(x^2-4)\log 2}\cdot(x^2-4)'=\dfrac{2x}{(x^2-4)\log 2}$

練習２２） $\log|y|$ の導関数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$　　(2)　$y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

解説

(1)　両辺の絶対値の自然対数をとると　　$\log|y|=3\log|x+1|-\log|x-1|-2\log|x+2|$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}=-\frac{6}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

よって　$y'=-\dfrac{6}{(x+1)(x-1)(x+2)}\cdot\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}=-\dfrac{6(x+1)^2}{(x-1)^2(x+2)^3}$

(2)　両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y|=\frac{1}{2}\log|x+2|-\log|x+1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{(x+1)-2(x+2)}{2(x+2)(x+1)}$$
$$=\frac{-(x+3)}{2(x+2)(x+1)}$$

よって　$y'=-\dfrac{x+3}{2(x+2)(x+1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}=-\dfrac{x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}$

別解　(2)　$y=(x+2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-1}$ であるから

$$y'=\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-1}+(x+2)^{\frac{1}{2}}\{-(x+1)^{-2}\}$$
$$=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+2}}-\frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(x+1)-2(x+2)}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}$$
$$=-\frac{x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}}$$

微分法【対数関数・指数関数の導関数】　練習問題

問題９） 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$　　(2)　$y=(x-1)^2\cdot\sqrt[3]{x+2}$

(解説)

(1)　$y'=2\cdot\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$

$$=2\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{8x(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

(2)　$y'=\{(x-1)^2\}'(x+2)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^2\left\{(x+2)^{\frac{1}{3}}\right\}'$

$$=2(x-1)(x+2)^{\frac{1}{3}}+(x-1)^2\cdot\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{6(x-1)(x+2)+(x-1)^2}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}=\frac{(7x+11)(x-1)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

練習２５） 次の関数を微分せよ。ただし，(6) の a は 1 でない正の定数とする。

(1)　$y=e^{2x}$　　(2)　$y=e^{-x^2}$　　(3)　$y=3^x$

(4)　$y=2^{-3x}$　　(5)　$y=xe^x$　　(6)　$y=(2x-1)a^x$

(解説)

(1)　$y'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$

(2)　$y'=e^{-x^2}\cdot(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

(3)　$y'=3^x\log 3$

(4)　$y'=2^{-3x}\log 2\cdot(-3x)'=-3\cdot 2^{-3x}\log 2$

(5)　$y'=1\cdot e^x+xe^x=(x+1)e^x$

(6)　$y'=(2x-1)'a^x+(2x-1)(a^x)'$

$$=2a^x+(2x-1)a^x\log a$$

$$=\{2+(2x-1)\log a\}a^x$$