微分法【高次導関数】　p.160

【内容目標】高次導関数の表記法を身につけ計算できるようにしよう。

□第 n 次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x の関数である。この関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，さらに微分して得られる導関数を，関数 $y=f(x)$ の **第 2 次導関数** といい，y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などの記号で表す。さらに，$f''(x)$ の導関数を，関数 $y=f(x)$ の **第 3 次導関数** といい，$\boldsymbol{y'''}$，$\boldsymbol{f'''(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3y}{dx^3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)}$ などの記号で表す。

微分を繰り返すので
指数のままにしておく

注意 y'，$f'(x)$ などを 第 1 次導関数 ということがある。

例１１） 次の関数について，第 2 次導関数および第 3 次導関数を求めよ。

(1)　$y=\sin x$ について

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x$$

(2)　$y=e^{-x}$ について

$$y'=-e^{-x},\quad y''=e^{-x},\quad y'''=-e^{-x}$$

一般に，関数 $y=f(x)$ を順次微分して n 回微分後に得られる関数を，$y=f(x)$ の **第 n 次導関数** といい，$\boldsymbol{y^{(n)}}$，$\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^ny}{dx^n}}$，$\boldsymbol{\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)}$ などの記号で表す。なお，$y^{(1)}$，$y^{(2)}$，$y^{(3)}$ は，それぞれ y'，y''，y''' を表す。第 2 次以上の導関数を **高次導関数** という。

たとえば，関数 $y=e^{-x}$ の導関数について，第 n 次導関数は $y^{(n)}=(-1)^ne^{-x}$ である。

例題） 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1)　$y=e^{2-x}$　　　　(2)　$y=xe^x$

解答

(1)　$y'=e^{2-x}\cdot(-1)=-e^{2-x}$,

$y''=-e^{2-x}\cdot(-1)=(-1)^2e^{2-x}$,

$(-1)^{\square}$ が 第n 次導関数と一致する

$y'''=(-1)^2e^{2-x}\cdot(-1)=(-1)^3e^{2-x}$,　……

よって　$y^{(n)}=(-1)^ne^{2-x}$

(2)　$y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$,

$y''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$,

次数と一致

$y'''=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$,　……

よって　$y^{(n)}=(x+n)e^x$

微分法【高次導関数】　練習問題

練習２６） 次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ。ただし，(1) の a は 0 でない定数とする。

(1)　$y=ax^3$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(3)　$y=\cos x$

(4)　$y=\log x$　　(5)　$y=e^x$　　(6)　$y=e^{-2x}$

練習２７） 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1)　$y=x^n$　(n は正の整数)　　(2)　$y=e^{2x}$

問題１０） 関数 $y=e^x(\sin x+\cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

$$y''-2y'+2y=0$$

微分法【高次導関数】　練習問題

練習２６） 次の関数について，第 3 次までの導関数を求めよ。ただし，(1) の a は 0 でない定数とする。

(1)　$y=ax^3$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x}$　　(3)　$y=\cos x$

(4)　$y=\log x$　　(5)　$y=e^x$　　(6)　$y=e^{-2x}$

(解説)

(1)　$y'=3ax^2$，$y''=6ax$，$y'''=6a$

(2)　$y=x^{-1}$ であるから　$y'=-x^{-2}$，$y''=2x^{-3}$，$y'''=-6x^{-4}$

よって　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$，$y'''=-\dfrac{6}{x^4}$

(3)　$y'=-\sin x$，$y''=-\cos x$，$y'''=\sin x$

(4)　$y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，$y'''=\dfrac{2}{x^3}$

(5)　$y'=e^x$，$y''=e^x$，$y'''=e^x$

(6)　$y'=-2e^{-2x}$，$y''=4e^{-2x}$，$y'''=-8e^{-2x}$

練習２７） 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1)　$y=x^n$　(n は正の整数)　　(2)　$y=e^{2x}$

(解説)

(1)　$y'=n\underline{x^{n-1}}$，$y''=n\times\underline{(n-1)x^{n-2}}$，……，$y^{(n)}=n(n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot2\cdot1=n!$

(2)　$y'=2\underline{e^{2x}}$，$y''=2\cdot\underline{2e^{2x}}=2^2e^{2x}$，……，$y^{(n)}=2^ne^{2x}$

問題１０） 関数 $y=e^x(\sin x+\cos x)$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

$$y''-2y'+2y=0$$

(解説)

$$y'=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$$

$$y''=2(e^x\cos x-e^x\sin x)=2e^x(\cos x-\sin x)$$

よって

$$\begin{aligned}y''-2y'+2y&=2e^x(\cos x-\sin x)-2\cdot2e^x\cos x+2e^x(\sin x+\cos x)\\&=2e^x\cos x-2e^x\sin x-4e^x\cos x+2e^x\sin x+2e^x\cos x\\&=0\end{aligned}$$