微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】　p.161～163

【内容目標】曲線の方程式や媒介変数で表された関数も微分できるようになろう。

□曲線の方程式と導関数

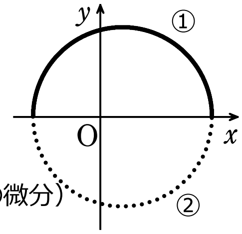
（陰関数の微分法）

（ｉ）　$y=f(x)$　～　陽関数（$explicit\ function$）
（ⅱ）　$f(x,y)=0$　～　陰関数（$implicit\ function$）

円 $(x-1)^2+y^2=16$ について，この式を y について解くと

$y^2=16-(x-1)^2$　より　$y=\pm\sqrt{16-(x-1)^2}$　であるから，

円 $(x-1)^2+y^2=16$ は，2 つの関数 $\begin{cases} y=\sqrt{16-(x-1)^2} & \cdots① \\ y=-\sqrt{16-(x-1)^2} & \cdots② \end{cases}$



のグラフを合わせたものと考えられる 。①の右辺を直接微分すると（陽関数の微分）

$$\frac{dy}{dx}=\left[\{16-(x-1)^2\}^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\{16-(x-1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\{16-(x-1)^2\}'$$

$$=\frac{-2x+2}{2\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{y}=\frac{-(x-1)}{y}=-\frac{x-1}{y}$$

②の右辺を直接微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\left[-\{16-(x-1)^2\}^{\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{2}\{16-(x-1)^2\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\{16-(x-1)^2\}'$$

$$=-\frac{-2x+2}{2\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{-\sqrt{16-(x-1)^2}}=\frac{-x+1}{y}=\frac{-(x-1)}{y}=-\frac{x-1}{y}$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}$

ここで $(x-1)^2+y^2=16$ の両辺を x の関数と考えて，それぞれ x で微分すると（**陰関数の微分**）

$x-1$ を置き換えるイメージ

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2+\frac{d}{dx}y^2=0$$

y はそもそも x の関数で $y(x)$ と表すべきものだから合成関数の微分法を用いる

$$\boxed{2(x-1)}\cdot\boxed{1}+\boxed{2y}\cdot\boxed{\frac{dy}{dx}}=0$$

y を置き換えるイメージ

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2(x-1)$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}$

例題７＋α） 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$x^2+y^2+2x-4=0$　　(2)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(1)　$x^2+\boxed{y^2}+2x-4=0$ の両辺を x について微分すると

x だったらいいのにな

$$2x+\boxed{2y}\cdot\boxed{\frac{dy}{dx}}+2=0$$

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x-2$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+1}{y}$

(2)　$4x^2+\boxed{9y^2}=36$ の両辺を x について微分すると

x だったらいいのにな

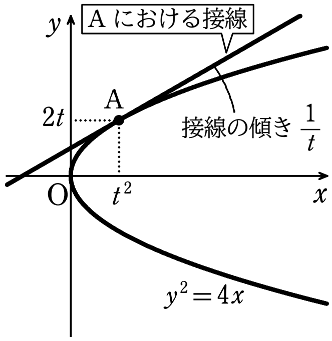
$$8x+\boxed{18y}\cdot\boxed{\frac{dy}{dx}}=0$$

$$18y\cdot\frac{dy}{dx}=-8x$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】　p.161～163

□曲線の媒介変数表示と導関数



放物線 $y^2=4x$ は，次のように**媒介変数表示**される。

$x=t^2$,

$y=2t$

このように媒介変数（パラメータ）を用いて表現された状態を**媒介変数表示**という（t は x と y の橋渡し役になる）

合成関数および逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

また，$\dfrac{dx}{dt}=2t$，$\dfrac{dy}{dt}=2$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=2\cdot\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{t}$

この式は，放物線 $y^2=4x$ 上の原点以外の点 $(t^2,\ 2t)$ における接線の傾きを表している。

補足　$t=\dfrac{y}{2}$ より $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ となり，陰関数の微分をした結果と同じであることがわかる。

曲線の媒介変数表示と導関数について，次のことが成り立つ。

曲線の媒介変数表示と導関数

$x=f(t)$，$y=g(t)$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

$x=f(t)$，$y=g(t)$ それぞれを t について微分してまとめよう

解説　合成関数および逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

一般に，座標平面上の曲線 C の媒介変数表示が，媒介変数を t として与えられたとき，この媒介変数表示が x の関数 y を定めると考え，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めることができる。

例題８） x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

放物線の媒介変数表示　　　楕円の媒介変数表示

(1)　$x=2t$，$y=t^2-1$　　　(2)　$x=3\cos t$，$y=2\sin t$

解説

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t$ から

x，y それぞれ t で微分

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t}{2}=t$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$ から

よって，$t\fallingdotseq 0$ のとき　省略されることも

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos t}{-3\sin t}=-\dfrac{2\cos t}{3\sin t}$

※ t ではなく x，y のみにするときもある　（そのときは与えられた式を $t=$　にして代入しよう）

(1)なら $t=\dfrac{x}{2}$ より　$\dfrac{dy}{dx}=t=\dfrac{x}{2}$　　(2)なら $\cos t=\dfrac{x}{3}$，$\sin t=\dfrac{y}{2}$ より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】 練習問題

練習２８） 関数 $y=2\sqrt{x}$，$y=-2\sqrt{x}$ をそれぞれ微分して，いずれの場合も $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ であることを確かめよ。

練習２９） 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=1$

(2)　$x^2-y^2=1$

練習３０） x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1)　$x=2t^2$，$y=2t-1$

(2)　$x=\cos t$，$y=\sin t$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】 練習問題

章末問題Ａ７） a，b は正の定数とする。次のことを示せ。

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$

入試問題） x の関数 y が，θ を媒介変数として次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表せ。

$$x=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta},\quad y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

【広島市立大】

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】 練習問題

練習２８） 関数 $y=2\sqrt{x}$，$y=-2\sqrt{x}$ をそれぞれ微分して，いずれの場合も $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ であることを確かめよ。

(解説)

$y=2\sqrt{x}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

$y=-2\sqrt{x}$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

練習２９） 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=1$　　　(2)　$x^2-y^2=1$

(解説)

(1)　$x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると　$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

(2)　$x^2-y^2=1$ の両辺を x で微分すると　$2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

練習３０） x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1)　$x=2t^2$，$y=2t-1$　　　(2)　$x=\cos t$，$y=\sin t$

(解説)

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=4t$，$\dfrac{dy}{dt}=2$ から　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{4t}=\dfrac{1}{2t}$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=\cos t$ から　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}$

微分法【曲線の方程式や媒介変数の微分】 練習問題

章末問題Ａ７） a，b は正の定数とする。次のことを示せ。

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$

（解説）

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b^2x}{a^2y}$

入試問題） x の関数 y が，θ を媒介変数として次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表せ。

$$x=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta},\quad y=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

【広島市立大】

（解説）

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{-\sin\theta(1+\sin\theta)-\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}=-\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)^2}=-\frac{1}{1+\sin\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1}{1+\cos\theta}$$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+\cos\theta}}{-\dfrac{1}{1+\sin\theta}}=-\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}$