微分法の応用【接線の方程式】 p.168～171

【内容目標】いろいろな曲線の接線を求められるようになろう。

□曲線 $y=f(x)$ の接線（２年生のおさらい）

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。よって，次のことが成り立つ。

> **接線の方程式**
>
> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
>
> $$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

接線は直線なので１次関数

例題１） 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式を求めよ。

解答　$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ とすると

まずは微分

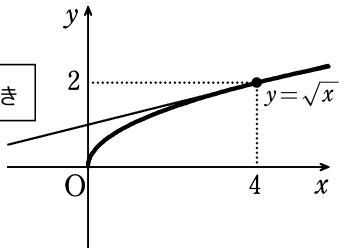
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(4,\ 2)$ における接線の傾き

であるから　$x=4$ のとき　$f'(4)=\dfrac{1}{4}$

よって，点 $(4,\ 2)$ における接線の方程式は

$$y-2=\frac{1}{4}(x-4) \quad すなわち \quad y=\frac{1}{4}x+1$$

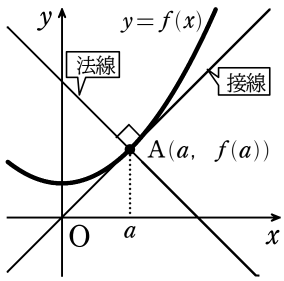


□曲線 $y=f(x)$ の法線

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。 曲線上の点 A を通り，A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を，点 A におけるこの曲線の **法線** という。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ に等しいから，$f'(a)\neq 0$ のとき，点 A における法線の **傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$** である。

掛けて -1 ⇒符号違いの逆数



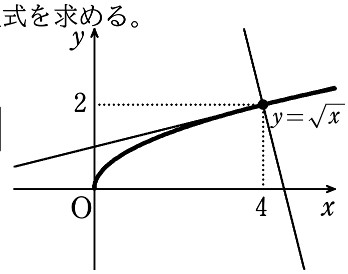
よって，次のことが成り立つ。

> **接線の方程式・法線の方程式**
>
> 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における
>
> 接線の方程式は　　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
>
> 法線の方程式は　$f'(a)\neq 0$ のとき　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

注意　$f'(a)=0$ のとき，法線の方程式は $x=a$ である。

微分法の応用【接線の方程式】　p.168〜171

例１）　曲線 $y=e^x$ 上の点 $(1,\ e)$ における法線の方程式を求める。



$f(x)=e^x$ とすると

まずは微分

$$f'(x)=e^x$$

よって　$f'(1)=e$

$(1,\ e)$ における接線の傾き

なので法線の傾きは　$-\dfrac{1}{e}$

符号違いの逆数

したがって，この法線の方程式は

$$y-e=-\frac{1}{e}(x-1)\qquad \text{すなわち}\qquad y=-\frac{1}{e}x+e+\frac{1}{e}$$ 終

□傾きや通る１点から接線の方程式を決定

応用例題１） 曲線 $y=\log x$ について，次のような接線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが e である　　(2)　原点を通る

方針　接点がわからないので、自分で接点を作る

数Ⅱの時と同じ

⇒接点の座標を $(a,\ \log a)$ として，この点における接線の方程式を作り，

条件を満たすように a の値を定める。

接点の x 座標を a とすると

接点の y 座標は $y=\log x$ に

代入して $\log a$ となる

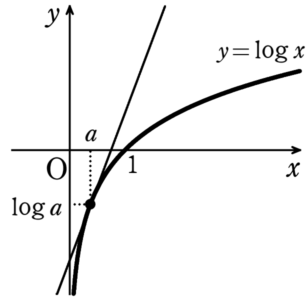
解答　$y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ \log a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)$$

$$y-\log a=\frac{1}{a}x-1$$

すなわち　$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1$　……①



(1)　接線①の傾きが e であるから

$\dfrac{1}{a}=e$　すなわち　$a=\dfrac{1}{e}$

①に代入すると

$$y=ex-1-1$$

整理して　$y=ex-2$

(2)　接線①が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

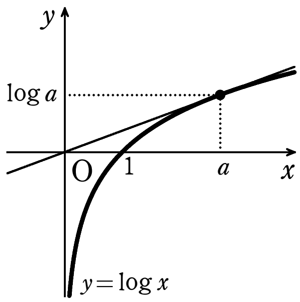
$$0=\frac{1}{a}\cdot 0+\log a-1$$

よって　$\log a=1$

したがって　$a=e$

①に代入すると

$$y=\frac{1}{e}x$$

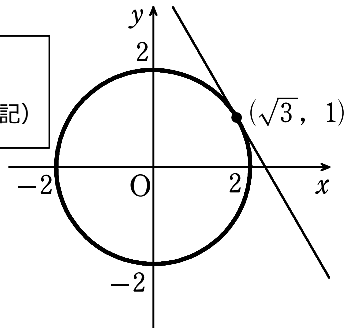


微分法の応用【接線の方程式】　p.168～171

□曲線の方程式と接線

曲線が x，y の方程式（陰関数）で表される場合には，y を x の関数とみて，方程式を x で微分して導関数 y' を求めることができる。

例）　円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(\sqrt{3},\ 1)$ における接線



$x^2+y^2=4$ の両辺を x で微分すると

$$2x+2yy'=0$$

x だったらいいのにな

（ここでは $\dfrac{dy}{dx}$ ではない表記）

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$y'=-\dfrac{x}{y}$

$x=\sqrt{3}$，$y=1$ を代入すると接線の傾きは

$$-\frac{\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$

よって接線は　$y-1=-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$$y-1=-\sqrt{3}\,x+3$$

$$\therefore\ \ y=-\sqrt{3}\,x+4$$

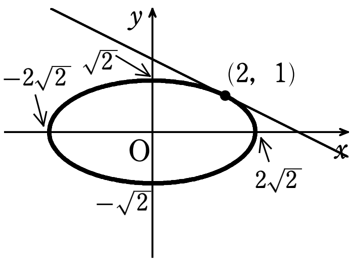
数Ⅱのときは公式より

$\sqrt{3}\,x+1\cdot y=4$

これを変形すると $y=-\sqrt{3}\,x+4$

（円であれば公式で良い）

例題２）　楕円 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。



$\boxed{\text{解答}}$　$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{8}+\frac{2yy'}{2}=0$$

x だったらいいのにな

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき

$$y'=-\frac{x}{4y}$$

ゆえに，点 $(2,\ 1)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{2}{4\cdot 1}=-\dfrac{1}{2}$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-2)\quad すなわち\quad y=-\frac{1}{2}x+2$$

他の平面図形も含め

数Ⅱで学んだ

円の接線の方程式の

覚え方が流用できる

$x^2+y^2=r^2$

$\Rightarrow x\cdot x+y\cdot y=r^2$

$\Rightarrow x_1x+y_1y=r^2$

ちなみに楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線の公式は　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

$\dfrac{2\cdot x}{8}+\dfrac{1\cdot y}{2}=1$より $x+2y=4$　$\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+2$

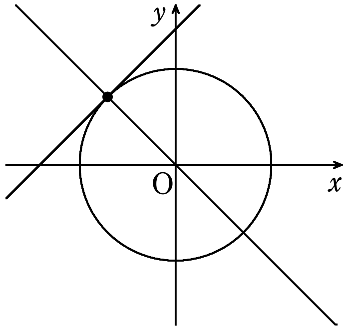
微分法の応用【接線の方程式】　p.168～171

□媒介変数で表示された曲線の接線（教科書外）

媒介変数で表示された曲線の場合には，媒介変数の微分法を利用して導関数 y' を求めることができる。

例題） 与えられた点 P における，次の曲線の接線および法線の方程式を求めよ。

$x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$，P は $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ に対応する点



解答　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$　　それぞれ微分

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos\theta}{-2\sin\theta}=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$　　合体

よって，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のときの接線の傾きは　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3}{4}\pi}=-\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1$

また，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$x=2\cos\dfrac{3}{4}\pi=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$，

$y=2\sin\dfrac{3}{4}\pi=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

ゆえに，点 $\mathrm{P}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ における接線の方程式は

$$y-\sqrt{2}=x-(-\sqrt{2})$$

すなわち　$y=x+2\sqrt{2}$

法線の傾きは-1

法線の方程式は

$$y-\sqrt{2}=-(x+\sqrt{2})$$

すなわち　$y=-x$

微分法の応用【接線の方程式】 p.168～171 練習問題

練習１） 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{4}{x}$, A$(-1,\ -4)$　　(2) $y=\tan x$, A$(0,\ 0)$

練習２） 次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{2}{x}$, A$(1,\ 2)$　　(2) $y=\sin x$, A$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

微分法の応用【接線の方程式】　p.168～171　練習問題

練習3） 曲線 $y=e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが 1 である　　　　(2)　点 $(1,\ 0)$ を通る

練習4） 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，A$(-1,\ 2)$

(2)　双曲線 $x^2-y^2=1$，A$(\sqrt{2},\ -1)$

微分法の応用【接線の方程式】　p.168～171　練習問題

練習１） 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{4}{x}$，A$(-1,\ -4)$　　　　(2)　$y=\tan x$，A$(0,\ 0)$

(解説)

(1)　$f(x)=\dfrac{4}{x}$ とすると

$$f'(x)=-\frac{4}{x^2}$$

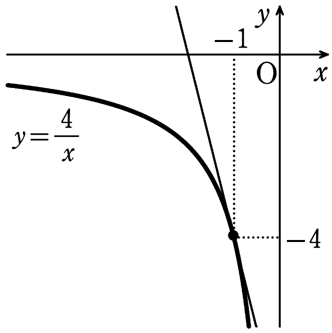
であるから

$$f'(-1)=-4$$

よって，点 $(-1,\ -4)$ における接線の方程式は

$$y-(-4)=-4\{x-(-1)\}$$

すなわち　$y=-4x-8$



(2)　$f(x)=\tan x$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

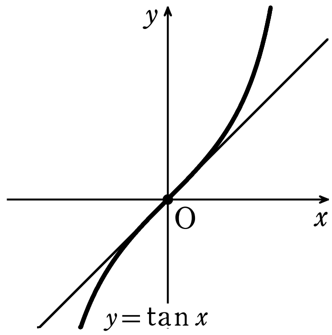
であるから

$$f'(0)=1$$

よって，点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=1\cdot(x-0)$$

すなわち　$y=x$



練習２） 次の曲線上の点 A における法線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{2}{x}$，A$(1,\ 2)$　　　　(2)　$y=\sin x$，A$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(解説)

(1)　$f(x)=\dfrac{2}{x}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$

よって　$f'(1)=-2$

したがって，求める法線の方程式は

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)\quad すなわち\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

(2)　$f(x)=\sin x$ とすると　$f'(x)=\cos x$

よって　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，求める法線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\quad すなわち\quad y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$$

微分法の応用【接線の方程式】　p.168～171 練習問題

練習３） 曲線 $y=e^x$ について，次のような接線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが1である　　　(2) 点 $(1,\ 0)$ を通る

(解説)

$y=e^x$ を微分すると　$y'=e^x$

ここで，接点の座標を $(a,\ e^a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-e^a=e^a(x-a)$$

すなわち　$y=e^ax+e^a(1-a)$　…… ①

(1) 接線 ① の傾きが1であるから

$$e^a=1 \qquad \text{すなわち} \qquad a=0$$

① に代入して　$y=x+1$

(2) 接線 ① が点 $(1,\ 0)$ を通るから　$0=e^a+e^a(1-a)$

よって　$e^a(2-a)=0$

$e^a\fallingdotseq 0$ であるから　$a=2$

① に代入すると　$y=e^2x+e^2(1-2)$

整理して　$y=e^2x-e^2$

練習４） 次の曲線上の点Aにおける接線の方程式を求めよ。

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，$\mathrm{A}(-1,\ 2)$

(2) 双曲線 $x^2-y^2=1$，$\mathrm{A}(\sqrt{2},\ -1)$

(解説)

(1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{2}+\frac{2yy'}{8}=0$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$y'=-\dfrac{4x}{y}$

ゆえに，点 $(-1,\ 2)$ における

接線の傾きは

$$-\frac{4\cdot(-1)}{2}=2$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-2=2\{x-(-1)\}$$

すなわち　$y=2x+4$

(2) $x^2-y^2=1$ の両辺を x で微分すると

$$2x-2yy'=0$$

よって，$y\fallingdotseq 0$ のとき　$y'=\dfrac{x}{y}$

ゆえに，点 $(\sqrt{2},\ -1)$ における

接線の傾きは

$$\frac{\sqrt{2}}{-1}=-\sqrt{2}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-(-1)=-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$$

すなわち　$y=-\sqrt{2}x+1$