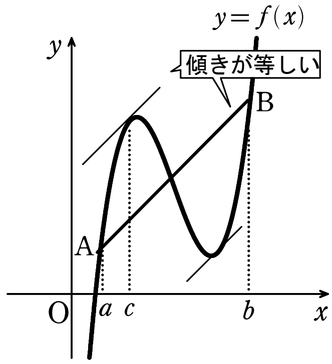
微分法の応用【平均値の定理】　p.172～173

【内容目標】平均値の定理を利用して証明できるようになろう。

□平均値の定理　（→中間値の定理のときに配ったプリントを参照しよう）



連続な関数 $f(x)$ について，$y=f(x)$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとる。

$f(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，このグラフ上の A，B 間の点における接線で，直線 AB と平行なものが少なくとも 1 本存在することが知られている。ここで，直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である。

また，接点の x 座標を c とすると，接線の傾きは $f'(c)$ である。

したがって，次を満たす実数 c が存在する。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b$$

図形的には「曲線 $y=f(x)$ 上に任意の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ をとると，線分 AB と**平行な接線が引ける**ような点 C が，2 点 A，B 間の曲線上にある。

一般に，次の 平均値の定理 が成り立つ。

平均値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

連続を述べるときは閉区間であっても、微分可能を述べるときは開区間を考える（端点は微分不可能でも良い）

例）次の関数と示された区間について，次の平均値の定理の式を満たす c の値を求めよ。

(1)　$f(x)=x^3-3x^2$，$[-2,\ 1]$　　(2)　$f(x)=e^x$，$[0,\ 1]$

(1)　関数 $f(x)=x^3-3x^2$ は微分可能で

$f'(x)=3x^2-6x \quad \Longrightarrow f'(c)=3c^2-6c$

また　$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{-2-(-20)}{3}=6$

よって，平均値の定理により

$$6=3c^2-6c,\quad -2<c<1$$

を満たす実数 c が存在する。

$c^2-2c-2=0$ から　　$c=1\pm\sqrt{3}$

$-2<c<1$ であるから　　$c=1-\sqrt{3}$

(2)　関数 $f(x)=e^x$ は微分可能で

$f'(x)=e^x \quad \Longrightarrow f'(c)=e^c$

また　$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=e-1$

よって，平均値の定理により

$$e-1=e^c,\quad 0<c<1$$

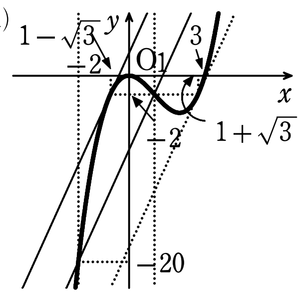
を満たす実数 c が存在する。

したがって

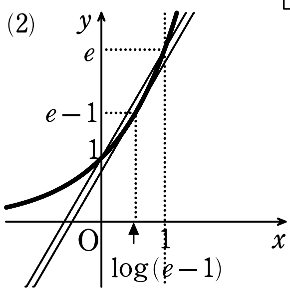
$c=\log(e-1)$

対数の定義

参考　(1)



(2)



微分法の応用【平均値の定理】　p.172〜173

平均値の定理において，関数 $f(x)$ は区間の端点 a，b では微分可能である必要はなく，連続でありさえすればよい。

しかし， a と b の間に微分可能でない点が１つでもある場合には，平均値の定理を満たす c が存在するとは限らない。

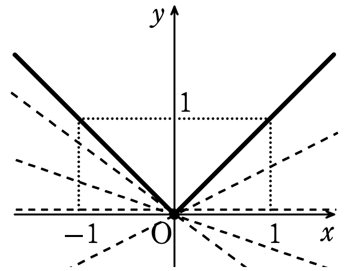
たとえば，区間 $[-1,\ 1]$ において， $f(x)=|x|$ のとき，

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-1}{2}=0 \text{ であるが}$$

$f'(c)=0$ ， $-1<c<1$ を満たす c は存在しない。

これは，区間 $[-1,\ 1]$ で

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能でないからである。



$(0,0)$ ではいろいろな接線が引けてしまう

⇒微分可能ではない

□不等式への応用

平均値の定理を使うのは、主に「不等式の証明」と「漸化式の極限」の問題

応用例題） 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$$0<a<b \text{ のとき}\quad \frac{1}{b}<\frac{\log b-\log a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

方針 … 関数 $f(x)=\log x$ と区間 $[a,\ b]$ に，平均値の定理を適用する。

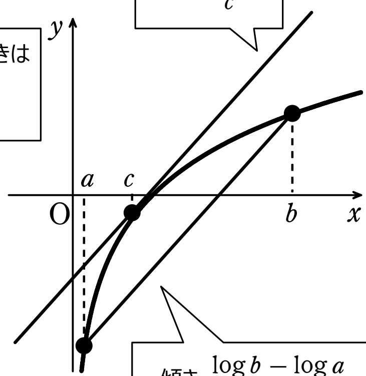
解答

関数 $f(x)=\log x$ は，

$x>0$ で微分可能で　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$x=c$ における傾きは $f'(c)=\dfrac{1}{c}$

傾き $\dfrac{1}{c}$



傾き $\dfrac{\log b-\log a}{b-a}$

区間 $[a,\ b]$ において，

平均値の定理を用いると

$$\frac{\log b-\log a}{b-a}=\frac{1}{c},\qquad a<c<b$$

を満たす実数 c が存在する。

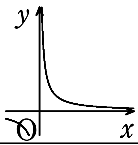
ここでいったん平均値の定理から離れる

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ は $x>0$ で単調に減少するから，

$a<c<b$ より

$$\frac{1}{a}>\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$$

x が大きくなるほど，y は小さくなる



すなわち　$\dfrac{1}{a+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$

$\dfrac{1}{c}=\dfrac{\log b-\log a}{b-a}$ なので

したがって　$\dfrac{1}{b}<\dfrac{\log b-\log a}{b-a}<\dfrac{1}{a}$

微分法の応用【平均値の定理】　p.172～173　練習問題

練習５） 次の平均値の定理が成り立つ。

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

$f(x)=x^3$，$a=-1$，$b=2$ の場合に，上の平均値の定理における c の値を求めよ。

練習６） 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$$a<b \text{ のとき} \qquad e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$$

微分法の応用【平均値の定理】 p.172～173　練習問題

入試問題） e を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．【名古屋大学】

入試問題） $a_n = \dfrac{(\log n)^2}{2}$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いても良い．【名古屋大学】

練習５） 次の平均値の定理が成り立つ。

関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

$f(x)=x^3$，$a=-1$，$b=2$ の場合に，上の平均値の定理における c の値を求めよ。

解説

$f(x)=x^3$ は，区間 $[-1,\ 2]$ で連続で，区間 $(-1,\ 2)$ で微分可能である。

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{8-(-1)}{3}=3$$

$$f'(c)=3c^2$$

よって　　$3c^2=3$　すなわち　$c^2=1$

$-1<c<2$ であるから　　$c=1$

練習６） 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$a<b$ のとき　　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

解説

関数 $f(x)=e^x$ は，実数全体で微分可能で　　$f'(x)=e^x$

区間 $[a,\ b]$ において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^c \quad \cdots\cdots ①$$

$$a<c<b \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす実数 c が存在する。

$f'(x)=e^x$ は増加関数であるから，② より　　$e^a<e^c<e^b$

よって，① より　　$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

微分法の応用【平均値の定理】　p.172～173　練習問題

入試問題） e を自然対数の底とする．$e \leqq p < q$ のとき，不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．【名古屋大学】

解説

$f(x) = \log(\log x)$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1}{x\log x}$

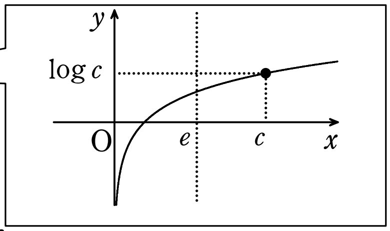
$x = c$ における傾きは　$f'(c) = \dfrac{1}{c\log c}$

区間 $p \leqq x \leqq q$ において，平均値の定理により，

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} = \frac{1}{c\log c} \quad \cdots\cdots ①$$

すなわち　$\log(\log q) - \log(\log p) = (q-p) \times \dfrac{1}{c\log c}$ となる c が

　$p < c < q$ の範囲に少なくとも1つ存在する．



ここで，$e \leqq p < c$ から　$e < c < c\log c$

ゆえに　$e < c\log c$

逆数をとって　$\dfrac{1}{c\log c} < \dfrac{1}{e}$　$\cdots\cdots ②$

よって，$p < q$ から　$0 < q - p$ であるから①②を用いて

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q-p} < \frac{1}{e}$$

$$\therefore \quad \log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

入試問題） $a_n = \dfrac{(\log n)^2}{2}$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ．

　ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ を用いても良い．【名古屋大学】

解説

$f(x) = \dfrac{(\log x)^2}{2}$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{2\log x}{2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\log x}{x}$

ここで平均値の定理により，

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\dfrac{\{\log(n+1)\}^2}{2} + \dfrac{(\log n)^2}{2}}{(n+1)-n} = f'(c_n) = \frac{\log c_n}{c_n} \quad \cdots\cdots ①$$　となる c_n が

　$n < c_n < n+1$ の範囲に少なくとも1つ存在する．

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ から　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log c_n}{c_n} = 0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log c_n}{c_n} = 0$