微分法の応用【関数の最大・最小】　p.180

【内容目標】増減表から最大・最小を読み取ろう！

例題６）　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=(1+\sin x)\cos x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

積の微分法

解答

$$y'=\cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)$$
$$=\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x$$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

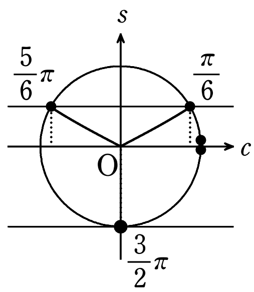
$$=-2\sin^2 x-\sin x+1$$
$$=-(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

$0<x<2\pi$ において，$y'=0$ となる x の値は

$$-(2\sin x-1)(\sin x+1)=0 \quad より$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \quad または \quad \sin x=-1$$

より　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$



y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots\cdots$	2π
$2\sin x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\sin x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	極大 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	極小 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

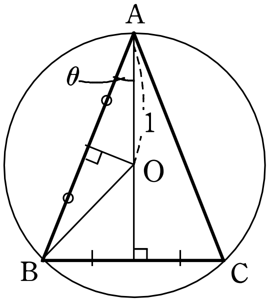
よって，y は

$$x=\frac{\pi}{6}\ で最大値\ \frac{3\sqrt{3}}{4},\quad x=\frac{5}{6}\pi\ で最小値\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

をとる。

微分法の応用【関数の最大・最小】　p.180

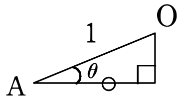
例題） AB＝AC，∠BAC＝2θ である二等辺三角形 ABC が，
半径１の円 O に内接している。θが変化するとき，
この三角形の周の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ。

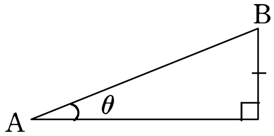


解答　△ABC において

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2\mathrm{OA}\cos\theta=2\cos\theta$

$\mathrm{BC}=2\mathrm{AB}\sin\theta=4\sin\theta\cos\theta$





△ABC の周の長さを y とすると

$$y=4\cos\theta+4\cos\theta\sin\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

積の微分法

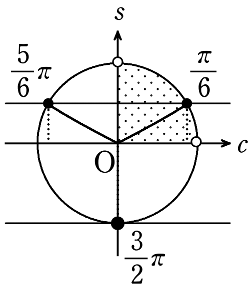
よって

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$\begin{aligned}y'&=-4\sin\theta+4(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&=-4\sin\theta+4(1-2\sin^2\theta)\\&=-4(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)\\&=-4(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)\end{aligned}$$

$y'=0$ となるのは $\sin x=\frac{1}{2}$　または　$\sin x=-1$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なので，$\theta=\frac{\pi}{6}$ のときである。



また，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において，y の増減表は次のようになる。

θ	0	……	$\frac{\pi}{6}$	……	$\frac{\pi}{2}$
$2\sin\theta-1$		$-$		$+$	
$\sin\theta+1$		$+$		$+$	
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 $3\sqrt{3}$	↘	

したがって，y は $\theta=\frac{\pi}{6}$ で 最大値 $3\sqrt{3}$ をとる。

練習１３） 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=(1+\cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(2) $y=\dfrac{4-3x}{x^2+1} \quad (1 \leqq x \leqq 4)$

節末問題５） 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=x\sqrt{4-x^2}$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(2)　$y=x+\sqrt{4-x^2}$

微分法の応用【関数の最大・最小】 練習問題

練習１３） 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=(1+\cos x)\sin x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$

(2)　$y=\dfrac{4-3x}{x^2+1} \quad (1\leqq x\leqq 4)$

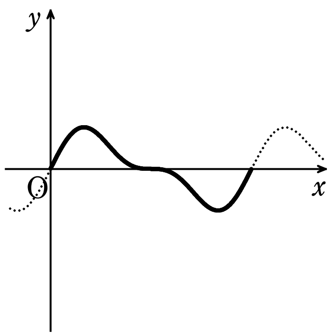
(解説)

(1)　$y'=-\sin x\cdot\sin x+(1+\cos x)\cos x$

$=\cos^2 x-1+\cos x+\cos^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$



$0<x<2\pi$ において，$y'=0$ となる x の値は

$2\cos x-1=0$ または $\cos x+1=0$

より　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \pi$

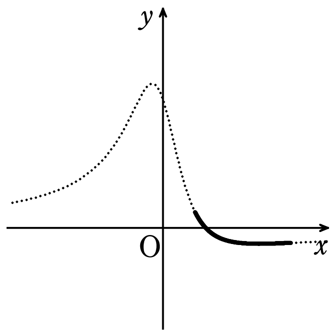
y の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\dfrac{\pi}{3}$	……	π	……	$\dfrac{5}{3}\pi$	……	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	極小 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

よって，y は $x=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

(2)　$y'=\dfrac{-3(x^2+1)-(4-3x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{3x^2-8x-3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$



$1<x<4$ において，$y'=0$ となる x の値は　$x=3$

y の増減表は次のようになる。

x	1	……	3	……	4
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{1}{2}$	↘	極小 $-\dfrac{1}{2}$	↗	$-\dfrac{8}{17}$

よって，y は $x=1$ で最大値 $\dfrac{1}{2}$，$x=3$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとる。

節末問題５） 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=x\sqrt{4-x^2}$　$(-1 \leqq x \leqq 2)$　　　　(2)　$y=x+\sqrt{4-x^2}$

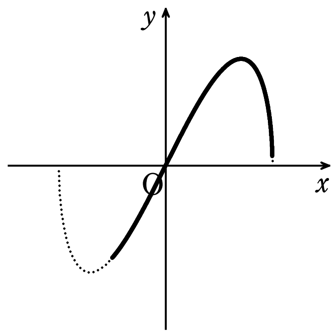
解説

(1)　$y'=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

$-1<x<2$ において $y'=0$ となる x の値は　$x=\sqrt{2}$

y の増減表は次のようになる。

x	-1	……	$\sqrt{2}$	……	2
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\sqrt{3}$	↗	極大 2	↘	0



よって，y は $x=\sqrt{2}$ で最大値 2,

$x=-1$ で最小値 $-\sqrt{3}$ をとる。

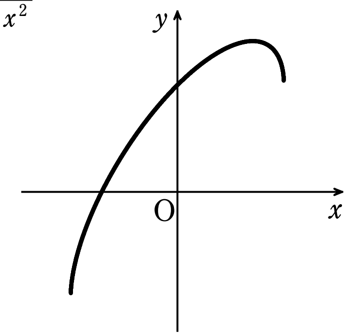
(2)　関数の定義域は，$4-x^2 \geqq 0$ より　$-2 \leqq x \leqq 2$

$-2<x<2$ において　$y'=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0$ となる x の値は，$\sqrt{4-x^2}=x$ より　$x=\sqrt{2}$

y の増減表は次のようになる。

x	-2	……	$\sqrt{2}$	……	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	極大 $2\sqrt{2}$	↘	2



よって，y は $x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$x=-2$ で最小値 -2 をとる。