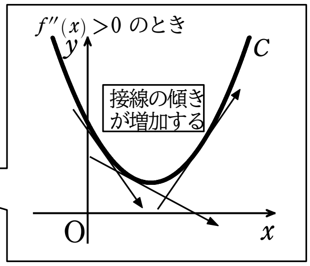
微分法の応用【関数のグラフ】　p.181～186

【内容目標】変曲点を調べてより正確なグラフをかいてみよう！

□曲線の凹凸

関数 $y=f(x)$ のグラフを C とする。$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数であるから，$f'(x)$ の値の増減は，$f''(x)$ の符号で調べることができる。また，$f'(x)$ の値の増減は，接線の傾きの増減を表す。

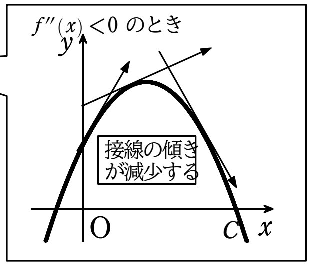
よって，次のことがいえる。



$f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値は増加する。

すなわち，曲線 C の接線の傾きが増加する。

⇒ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが増加するとき，曲線はこの区間で 下に凸 である



$f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値は減少する。

すなわち，曲線 C の接線の傾きが減少する。

⇒ある区間で，x の値が増加すると曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きが減少するとき，曲線はこの区間で上に凸 である

上で調べたことをまとめると，次のことがいえる。

> **$f''(x)$ の符号と曲線 $y=f(x)$ の凹凸**
>
> 関数 $f(x)$ が第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき
>
> 1　$f''(x)>0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は**下に凸**である。
>
> 2　$f''(x)<0$ である区間では，曲線 $y=f(x)$ は**上に凸**である。

□変曲点

例３）　曲線 $y=x^3-3x^2+4$ の凹凸

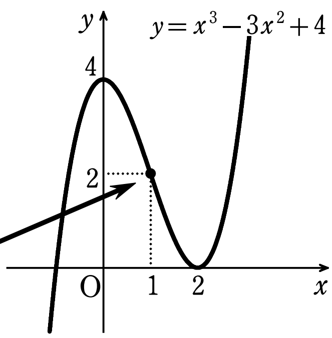
$y'=3x^2-6x$

$y''=6x-6=6(x-1)$ → $y''=0$ とすると $x=1$

y'' の符号を調べて，この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	2	下に凸

終



点 $(1,\ 2)$ を境目として曲線の凹凸が入れかわる。このように，曲線の凹凸が入れかわる境目の点を **変曲点** という。

> **曲線 $y=f(x)$ の変曲点**
>
> $f''(a)=0$ のとき，**$x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば，**
>
> 点 $(a,\ f(a))$ は曲線 $y=f(x)$ の**変曲点**である。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.181～186

点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば $f''(a)=0$ である。しかし，$f''(a)=0$ であっても点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるとは限らない（なるときもならないときもある）。

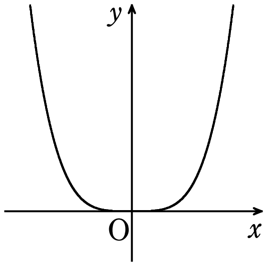
たとえば，関数 $f(x)=x^4$ を考える。

$f'(x)=4x^3$，$f''(x)=12x^2$

より，曲線 $y=f(x)$ の凹凸は，右の表のようになる。

よって，$f''(0)=0$ であっても，原点 $(0,\ 0)$ はこの曲線の変曲点ではない。

x	……	0	……
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	下に凸	0	下に凸



練習１４） 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

(1)　$y=x^4+2x^3+1$　　　(2)　$y=xe^{-x}$

(3)　$y=x-\cos x$　$(0<x<\pi)$　　　(4)　$y=-x^4+4x^3-6x^2+4x$

解答

(1)　$y'=4x^3+6x^2$，

$y''=12x^2+12x=12x(x+1)$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	……	-1	……	0	……
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下に凸	変曲点 0	上に凸	変曲点 1	下に凸

変曲点の座標は　$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

変曲点を調べるだけなので
$f'(x)$ は省略している

(2)　$y'=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	……	2	……
y''	$-$	0	$+$
y	上に凸	変曲点 $\dfrac{2}{e^2}$	下に凸

変曲点の座標は　$\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$

(3)　$y'=1+\sin x$，$y''=\cos x$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	0	……	$\dfrac{\pi}{2}$	……	π
y''		$+$	0	$-$	
y		下に凸	変曲点 $\dfrac{\pi}{2}$	上に凸	

変曲点の座標は　$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

(4)　$y'=-4x^3+12x^2-12x+4$，

$y''=-12x^2+24x-12$

$=-12(x^2-2x+1)$

$=-12(x-1)^2$

この曲線の凹凸は，次の表のようになる。

x	……	1	……
y''	$-$	0	$-$
y	上に凸	1	上に凸

変曲点はない。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.181～186

例題７） 関数 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ。

解答　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする。

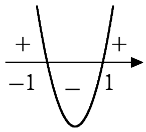
$$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

-1 は負，$e^{-\frac{x^2}{2}}$ は正⇒ x で正負が決まる（正負は逆）

$$f''(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-x\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ は正⇒ x^2-1 で正負が決まる



$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	……	-1	……	0	……	1	……
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤵

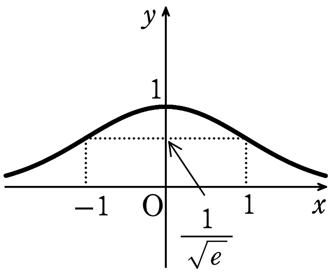
$f'+\ f''+ \Longrightarrow$ ⤴，
$f'+\ f''- \Longrightarrow$ ↗，
$f'-\ f''- \Longrightarrow$ ↘，
$f'-\ f''+ \Longrightarrow$ ⤵

補足
⤴ は下に凸で増加，
↗ は上に凸で増加，
↘ は上に凸で減少，
⤵ は下に凸で減少
であることを示している。

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

また
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。



以上から，グラフの概形は，
右の図のようになる。

注意　関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ は $f(-x)=f(x)$ を満たすから，例題７のグラフは y 軸に関して対称である。グラフの概形をかくときは，グラフの対称性にも注意するとよい。

微分法の応用【関数のグラフ】 p.181～186

例題８） 関数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフの概形をかけ。

漸近線は $x=1$ ， $y=x+1$

解答 関数の定義域は $x-1\neq 0$ より $x\neq 1$ である。

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ とすると，$f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}=x+1+(x-1)^{-1}$ であるから

$$f'(x)=1-(x-1)^{-2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

$(x-1)^2$ は正
$\Rightarrow x(x-2)$ で正負が決まる

$$f''(x)=2(x-1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$(x-1)^3$ で正負が決まる

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	……	0	……	1	……	2	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘		↘	極小 4	↗

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 　 $\displaystyle\lim_{x\to1-0} f(x)=-\infty$ 　 $\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x)=\infty$ 　 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

また $\displaystyle\lim_{x\to1+0} f(x)=\infty$， $\displaystyle\lim_{x\to1-0} f(x)=-\infty$

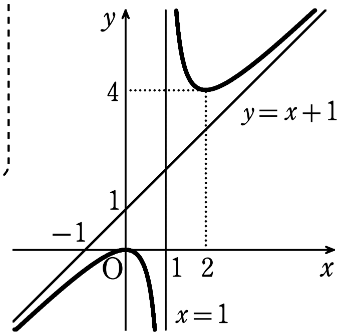
であるから，直線 $x=1$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\frac{1}{x-1}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(x+1)\}=\frac{1}{x-1}=0$

であるから，直線 $y=x+1$ もこの曲線の
漸近線である。

以上から，このグラフの概形は，
右の図のようになる。



補足 関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，$\displaystyle\lim_{x\to c+0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to c-0} f(x)$ のうち，

少なくとも１つが ∞ または $-\infty$ であるとき，直線 $x=c$ は漸近線である。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ であるとき，

直線 $y=ax+b$ は漸近線である。

微分法の応用【関数のグラフ】　p.181～186

例題）　関数 $y=x-2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフの概形

$y'=1-2\cos x$，　$y''=2\sin x$

$0<x<2\pi$ の範囲で，$y'=0$ となる x は　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

また，$y''=0$ となる x は　$x=\pi$

よって，y の増減，グラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	0	$\cdots\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots\cdots$	π	$\cdots\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots\cdots$	2π
y'	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	／
y''	／	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	／
y	0	↘	極小	↗	変曲点	↗	極大	↘	2π

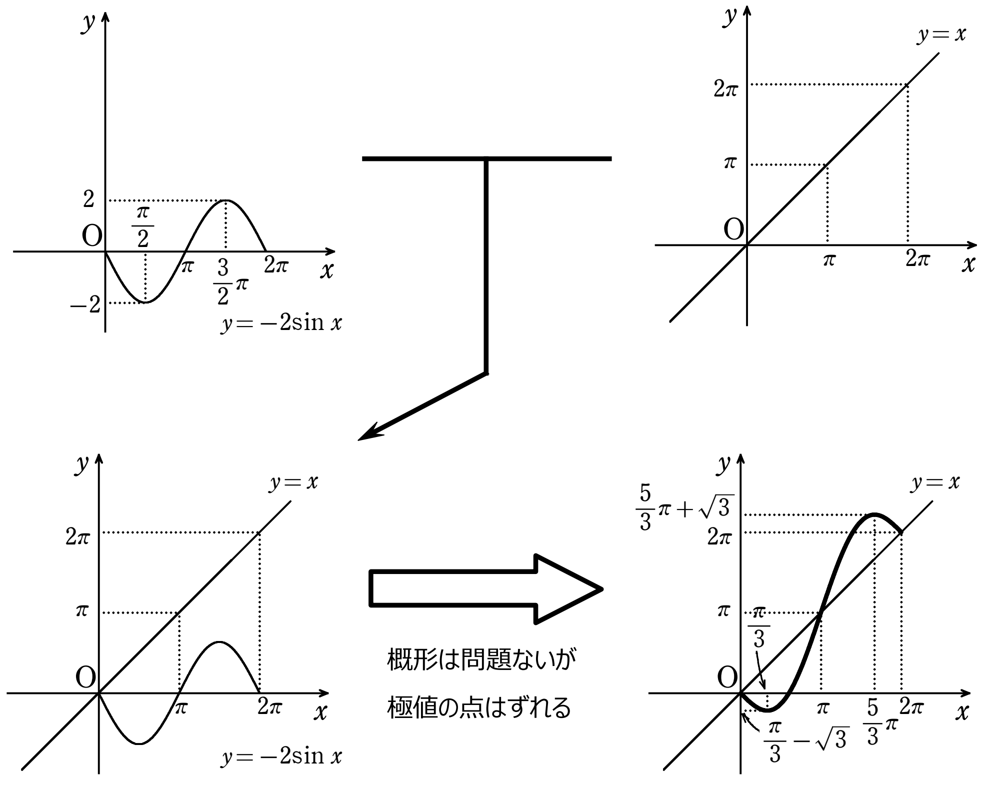
ゆえに，y は

$x=\dfrac{\pi}{3}$ で極小値 $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，

$x=\dfrac{5}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$

をとる。

以上により，グラフの概形は図のようになる。



練習１５） 関数 $y=e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ。

練習１６） 関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

練習１５） 関数 $y=e^{-2x^2}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べて，グラフの概形をかけ。

(解説)

$f(x)=e^{-2x^2}$ とする。

$$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$$

$$f''(x)=-4\left\{e^{-2x^2}+x\left(-4xe^{-2x^2}\right)\right\}=4(4x^2-1)e^{-2x^2}$$

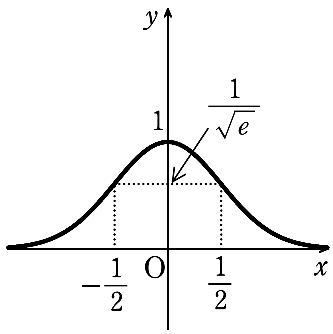
$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	極大 1	↘	変曲点 $\frac{1}{\sqrt{e}}$	⤵

また

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

であるから，x 軸はこの曲線の漸近線である。
以上から，グラフの概形は，右の図のようになる。



練習１６） 関数 $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ のグラフの概形をかけ。

(解説)

関数の定義域は $x \neq -1$ である。

$f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ とする。$f(x)=x-2+\dfrac{4}{x+1}$ であるから

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2},\qquad f''(x)=\frac{8}{(x+1)^3}$$

$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-3	$\cdots\cdots$	-1	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	極大 -7	↘	／	↘	極小 1	↗

また

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to -1-0} f(x)=-\infty$$

であるから，直線 $x=-1$ はこの曲線の漸近線である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$

$$\lim_{x\to -\infty}\{f(x)-(x-2)\}=0$$

であるから，直線 $y=x-2$ もこの曲線の漸近線である。

以上から，グラフの概形は，右の図のようになる。