微分法の応用【第２次導関数と極値】　p.187～188

【内容目標】第２次導関数を調べて極値を考えてみよう！

□第２次導関数と極値

関数 $f(x)$ の極値を判定するのに，第 2 次導関数 $f''(x)$ を利用する方法がある。$f''(x)$ が連続関数であるとき，次のことが成り立つ。

> **第２次導関数と極値**
>
> 1　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば，$f(a)$ は極小値である。
>
> 2　$f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば，$f(a)$ は極大値である。

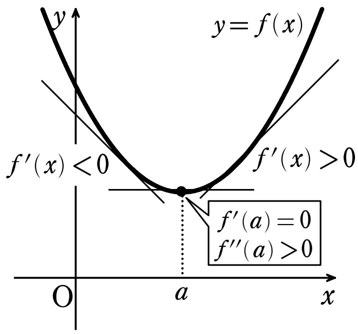
【１の証明】$f''(a)>0$ のとき，a に十分近い x では $f''(x)>0$ となり，$f'(x)$ は増加する。

ここで，$f'(a)=0$ であるから

$x<a$ では $f'(x)<0$

$x>a$ では $f'(x)>0$

x	……	a	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗



よって，このとき $f(a)$ は極小値である。　終

２についても，同様にして証明することができる。

【注意】 $f''(a)=0$ のときは，$f(a)$ が極値である場合も，極値でない場合もある。

例４）　関数 $f(x)=-x^3+3x$ の極値

$f'(x)=-3x^2+3$，$f''(x)=-6x$

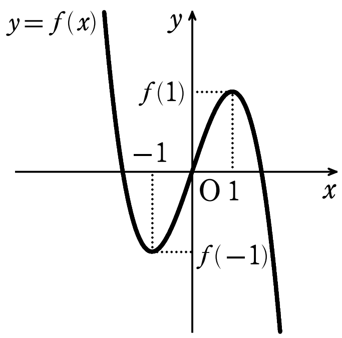
$f'(x)=0$ とすると

$x=-1$，1

$f''(-1)=6>0$，$f''(1)=-6<0$

であるから

$f(-1)$ が極小値，$f(1)$ が極大値　終



微分法の応用【第２次導関数と極値】　p.187〜188

例題９）　次の関数の極値を，第２次導関数を利用して求めよ。

$$f(x)=x+2\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

解答

$$f'(x)=1-2\sin x,$$

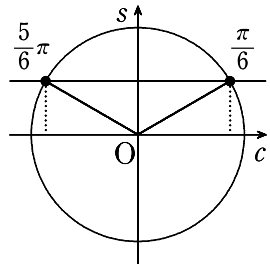
$$f''(x)=-2\cos x$$

$0<x<\pi$ において，$f'(x)=0$ となる x の値は

$$1-2\sin x=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$



ここで　$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0,$

$$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-2\cos\frac{5}{6}\pi=-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}>0$$

x	……	$\frac{\pi}{6}$	……	$\frac{5}{6}\pi$	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は

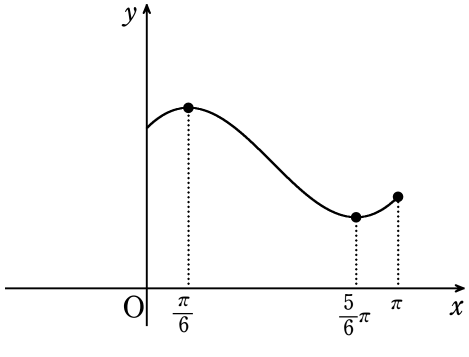
$x=\frac{\pi}{6}$ で極大値 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

$x=\frac{5}{6}\pi$ で極小値 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$ をとる。

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi+2\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$$

参考



練習１７） 次の関数の極値を，第２次導関数を利用して求めよ。

(1)　$f(x)=x^4-6x^2+5$

(2)　$f(x)=x+2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

練習１７） 次の関数の極値を，第２次導関数を利用して求めよ。

(1)　$f(x)=x^4-6x^2+5$　　(2)　$f(x)=x+2\sin x$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(解説)

(1)　$f'(x)=4x^3-12x$，$f''(x)=12x^2-12$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$

ここで　$f''(0)=-12<0$，$f''(\sqrt{3})=24>0$，$f''(-\sqrt{3})=24>0$

よって，$f(x)$ は

$x=0$ で極大値 5，$x=\pm\sqrt{3}$ で極小値 -4 をとる。

(2)　$f'(x)=1+2\cos x$，$f''(x)=-2\sin x$

$0<x<2\pi$ において，$f'(x)=0$ となる x の値は　$x=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

ここで　$f''\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}<0$，$f''\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=\sqrt{3}>0$

よって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\dfrac{4}{3}\pi$ で極小値 $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ をとる。