微分法の応用【方程式・不等式への応用】　p.190～191

【内容目標】微分法を用いて不等式を証明したり方程式の個数を調べよう

□不等式の証明

数Ⅱと同様

応用例題４）　$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$e^x > 1+x$$

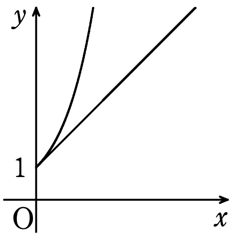
証明　$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと　　$f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$f(0)=0$ から，$x>0$ のとき　　$f(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき　　$e^x>1+x$　終



注意　更に，任意の自然数 n に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

e^x の方が大きくなるスピードが速い

となることが知られている。これは $y=e^x$ が $x\longrightarrow\infty$ のとき $y=x^n$ と比較して，より急速に増大することを意味している。

□方程式の実数解の個数

数Ⅱと同様

応用例題５） a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

a を分離させる

$$\frac{e^x}{x}=a$$

解　$\dfrac{e^x}{x}=a$ より

$y=\dfrac{e^x}{x}$ と $y=a$ の交点の個数の話に持っていく

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$ となる x は

$x=1$ であるから，

$f(x)$ の増減表は上のようになる。また

x	……	0	……	1	……
e^x	$+$	1	$+$	e	$+$
$x-1$	$-$	-1	$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$	1	$+$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	極小 e	↗

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0,\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点を考えて，

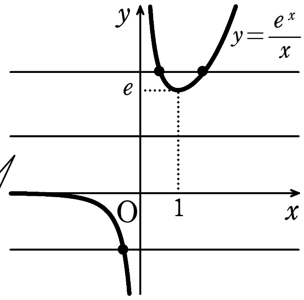
求める実数解の個数は，次のようになる。

$a>e$ のとき　2個

$a=e$，$a<0$ のとき　1個

$0\leqq a<e$ のとき　0個

$y=a$ (横線)を動かして共有点の個数を考える



練習１８） $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$\log(x+1)<x$

(2)　$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

練習１９） a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{x-1}=a$

(2) $xe^x-a=0$

練習１８） $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1)　$\log(x+1)<x$　　　　(2)　$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

解説

(1)　$f(x)=x-\log(x+1)$ とすると　　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}$

$x>0$ のとき　　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　　$x-\log(x+1)>0$

すなわち　　$\log(x+1)<x$

(2)　$f(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とすると　　$f'(x)=e^x-(1+x)$，$f''(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき　　$f''(x)>0$

よって，$f'(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f'(x)>f'(0)=0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する。

ゆえに，$x>0$ のとき　　$f(x)>f(0)=0$

したがって，$x>0$ のとき　　$e^x-\left(1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right)>0$

すなわち　　$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

練習１９） a は定数とする。次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $\dfrac{x^3}{x-1}=a$　　　　(2) $xe^x-a=0$

(解説)

(1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ とすると

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

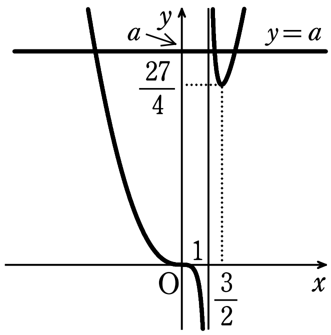
x	……	0	……	1	……	$\frac{3}{2}$	……
$f'(x)$	$-$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	／	↘	極小 $\frac{27}{4}$	↗

また

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-\frac{1}{x}}=\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1-\frac{1}{x}}=\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty$$



よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する。

したがって

$a>\dfrac{27}{4}$ のとき3個，$a=\dfrac{27}{4}$ のとき2個，$a<\dfrac{27}{4}$ のとき1個

(2)　$xe^x-a=0$ から　　$xe^x=a$

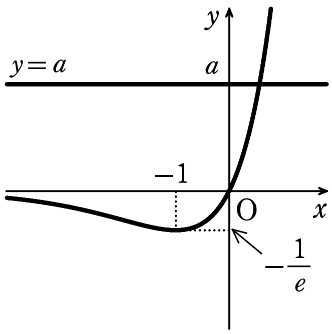
$f(x)=xe^x$ とすると　　$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

また　　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，求める実数解の個数と一致する。

したがって

$-\dfrac{1}{e}<a<0$ のとき 2 個，

$a=-\dfrac{1}{e}$，$a\geqq 0$ のとき 1 個，

$a<-\dfrac{1}{e}$ のとき 0 個