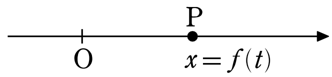
微分法の応用【速度・加速度】　p.192～195

【内容目標】微分をいろいろなことに活用してみよう

□直線上の点の運動

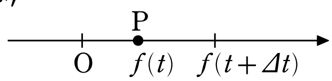


数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として

$$x=f(t)$$

と表されるとする。このとき，時刻 t から $t+\Delta t$ までの 平均速度 は，

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{(t+\Delta t)-t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$



で表される。

この平均速度において，$\Delta t \longrightarrow 0$ のときの極限値を，時刻 t における点 P の **速度** という。速度を v で表すと

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

である。P は，$v>0$ のとき数直線上を正の向きに動き，$v<0$ のとき負の向きに動く。また，v の絶対値 $|v|$ を，点 P の **速さ** という。

さらに，速度 v の時刻 t における変化率を，点 P の **加速度** という。加速度を α で表すと，次のようになる。

$$\alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

以上のことをまとめると，次のようになる。

速度と加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標 x が $x=f(t)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α は

$v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$，　１回微分したら『速度』　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$　２回微分したら『加速度』

例題１０）　数直線上を運動する点 P の座標 x が，時刻 t の関数として，$x=2\sin(\pi t-b)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α を求めよ。ただし，b は定数とする。

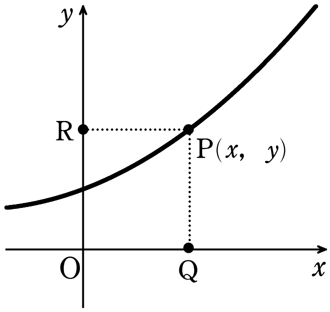
解答　速度 v は　$v=\dfrac{dx}{dt}=2\pi\cos(\pi t-b)$

加速度 α は　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-2\pi^2\sin(\pi t-b)$

補足　例の点 P の運動を**単振動**という。α は $\alpha=-\pi^2 x$ とも表される。

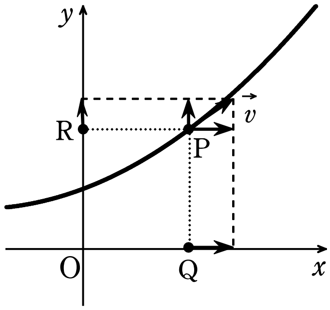
微分法の応用【速度・加速度】　p.192〜195

□平面上の点の運動



　時刻 t における点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，x，y は t の関数となる。このとき，P から x 軸，y 軸に下ろした垂線を，それぞれ PQ，PR とすると，点 Q は x 軸上を，点 R は y 軸上を動く。したがって，時刻 t における点 Q の速度は $\dfrac{dx}{dt}$，

点 R の速度は $\dfrac{dy}{dt}$ である。



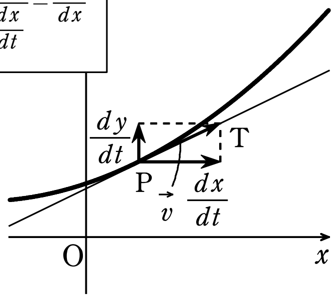
これらを，それぞれ点 P の x 軸方向の速度，y 軸方向の速度といい，これらを成分とするベクトル $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を，

時刻 t における点 P の **速度** という。

　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，P の速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$

を，右の図のように $\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ とすると，直線 PT の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ である。

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}$$



　よって，直線 PT は，P の描く曲線の P における接線である。

　速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を，点 P の **速さ** という。

　さらに，x 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2x}{dt^2}$，y 軸方向の加速度 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を成分とするベクトル $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ を，時刻 t における点 P の **加速度** という。また，加速度 $\vec{\alpha}$ の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を，点 P の **加速度の大きさ** という。

　これまでのことをまとめると，次のようになる。

> **速度と加速度**
>
> 座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における x 座標，y 座標が t の関数であるとき，時刻 t における P の速度 $\vec{v}$，速さ $|\vec{v}|$，加速度 $\vec{\alpha}$，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は
>
> $$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\qquad |\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
>
> $$\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right),\qquad |\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

微分法の応用【速度・加速度】　p.192～195

例題１１）　座標平面上を運動する点Ｐの座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t \qquad (r,\ \omega \text{ は正の定数})$$

で表されるとき，時刻 t におけるＰの速さ，加速度の大きさを求めよ。

解答　時刻 t におけるＰの速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-r\omega\sin\omega t$，　$\dfrac{dy}{dt}=r\omega\cos\omega t$

よって，速さ $|\vec{v}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\cos\omega t)^2}$$
$$=\sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}=r\omega$$

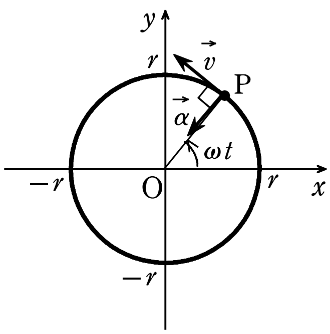
$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-r\omega^2\cos\omega t$，　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-r\omega^2\sin\omega t$

よって，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2+(-r\omega^2\sin\omega t)^2}$$
$$=\sqrt{r^2\omega^4(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}=r\omega^2$$

例題１１の点Ｐは円 $x^2+y^2=r^2$ の周上を動く。この円運動の速さは $r\omega$ であるから一定である。このように，速さが一定の円運動を **等速円運動** という。

また，例題１１では $\vec{\alpha}=-\omega^2(x,\ y)$ と表される。
一般に，等速円運動する点Ｐの加速度 $\vec{\alpha}$ の向きは，
Ｐから円の中心に向かう向きであり，$\vec{\alpha}$ は速度 $\vec{v}$ に垂直である。



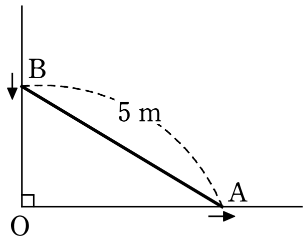
練習２０）地上から，初速度 v_0 m/sでボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ で与えられる。ただし，g は定数とする。t 秒後におけるボールの速度 v m/s と加速度 α m/s^2 を求めよ。

練習２１）時刻 t における点Ｐの座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ における P の速さ，加速度の大きさを求めよ。

(1) $x=2t+1$，$y=t^2-4t$

(2) $x=2\cos\pi t$，$y=2\sin\pi t$

章末問題Ｂ１３） 地面に垂直な壁に長さ 5 m の棒を立てかけ，この棒の下端 A を，地面上を速さ 0.3 m/s で壁から垂直に遠ざける。棒の下端 A が壁から 4 m 離れたときに，棒の上端 B が壁面上を動く速さを求めよ。



微分法の応用【速度・加速度】 練習問題

練習２０） 地上から，初速度 v_0 m/sでボールを真上に打ち上げるとき，t 秒後の高さ x m は，$x=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ で与えられる。ただし，g は定数とする。t 秒後におけるボールの速度 v m/s と加速度 α m/s^2 を求めよ。

(解説)

速度 v は　$v=\dfrac{dx}{dt}=v_0-gt$　(m/s)

加速度 α は　$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=-g$　(m/s^2)

練習２１） 時刻 t における点 P の座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられるとき，$t=3$ における P の速さ，加速度の大きさを求めよ。

(1)　$x=2t+1$，$y=t^2-4t$　　(2)　$x=2\cos\pi t$，$y=2\sin\pi t$

(解説)

時刻 t における P の速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

(1)　$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=2t-4$

$t=3$ のとき　$\dfrac{dy}{dt}=2\cdot3-4=2$

よって，速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(2,\ 2)$

速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

また，$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$

よって，加速度 $\vec{\alpha}$ は　$\vec{\alpha}=(0,\ 2)$

加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2$

(2)　$\vec{v}$ の成分は　$\dfrac{dx}{dt}=-2\pi\sin\pi t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\pi\cos\pi t$

$t=3$ のとき　$\dfrac{dx}{dt}=0$，$\dfrac{dy}{dt}=-2\pi$

よって，速度 $\vec{v}$ は　$\vec{v}=(0,\ -2\pi)$

速さ $|\vec{v}|$ は　$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+(-2\pi)^2}=\sqrt{4\pi^2}=2\pi$

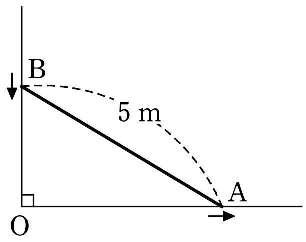
また，$\vec{\alpha}$ の成分は　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-2\pi^2\cos\pi t$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-2\pi^2\sin\pi t$

$t=3$ のとき　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=2\pi^2$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

よって，加速度 $\vec{\alpha}$ は　$\vec{\alpha}=(2\pi^2,\ 0)$

加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(2\pi^2)^2+0^2}=\sqrt{(2\pi^2)^2}=2\pi^2$

章末問題Ｂ１３）地面に垂直な壁に長さ 5 m の棒を立てかけ，この棒の下端 A を，地面上を速さ 0.3 m/s で壁から垂直に遠ざける。棒の下端 A が壁から 4 m 離れたときに，棒の上端 B が壁面上を動く速さを求めよ。



(解説)

点 O を座標平面の原点とし，直線 OA を x 軸，直線 OB を y 軸とする。

$\mathrm{OA}=x\,(\mathrm{m})$，$\mathrm{OB}=y\,(\mathrm{m})$ とおくと，三平方の定理により

$$x^2+y^2=5^2 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，$x=4$ のとき　$y=3$

x，y は時刻 t の関数であるから，① の両辺を t で微分して 2 で割ると

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$$

これに，$\dfrac{dx}{dt}=0.3$，$x=4$，$y=3$ を代入すると

$$4\times0.3+3\times\frac{dy}{dt}=0$$

すなわち　$\dfrac{dy}{dt}=-0.4$

したがって，棒の上端 B の速さは，0.4 m/s である。