微分法の応用【近似式】　p.196～197

□近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

で定義される。よって，h が 0 に十分近い値のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\fallingdotseq f'(a)$ であると考えてよい。

両辺に h をかけて　$f(a+h)-f(a)\fallingdotseq f'(a)\times h$　　$\therefore\ f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

これは，h が 0 に十分近い値のとき，$f(a+h)$ の値を h の 1 次式で近似する式となっている。

1 次の近似式

h が 0 に十分近いとき

$h\fallingdotseq 0$ のとき　　$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

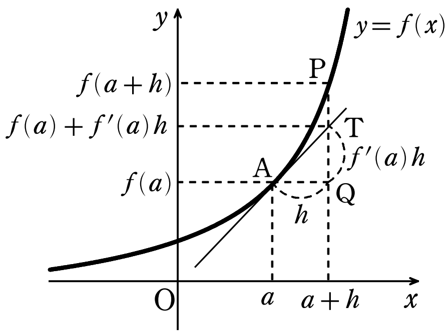
上の近似式の意味を，グラフで考えてみよう。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は　$y=f(a)+f'(a)(x-a)$　と表される。

よって，$h\fallingdotseq 0$ のとき，右の図において，

点 P の y 座標を点 T の y 座標で近似する

ということである。



例６） $h\fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の 1 次の近似式を作る。

解答　$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$h\fallingdotseq 0$ のとき　$\sin(a+h)\fallingdotseq\sin a+h\cos a$

「1 次の近似式」で，とくに $a=0$ のときを考え，h を x におき換えると，次の近似式が得られる。

$x\fallingdotseq 0$ のときの 1 次の近似式

x が 0 に十分近いとき

$x\fallingdotseq 0$ のとき　　$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

例）　p を有理数とするとき，近似式「$x\fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p\fallingdotseq 1+px$」を導け。
また，この近似式を用いて，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を求めよ。

解答　$f(x)=(1+x)^p$ について　　$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$　よって　$f(0)=1$，$f'(0)=p$

これらを，$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して　$x\fallingdotseq 0$ のとき　　$(1+x)^p\fallingdotseq 1+px$

また，$\sqrt[3]{1.006}=(1+0.006)^{\frac{1}{3}}$ であるから

$\sqrt[3]{1.006}\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}\times 0.006=1.002$

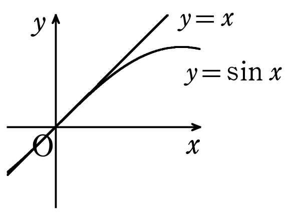
$x=0.006$　　$p=\dfrac{1}{3}$

例） $(\sin x)'=\cos x$ であるから，$x\fallingdotseq 0$ のとき

$\sin x\fallingdotseq\sin 0+(\cos 0)\cdot x$

すなわち　$\sin x\fallingdotseq x$

$y=\sin x$ と $y=x$ は 0 の近くでは似た形



練習２２） $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，１次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$　　(2) $\tan(a+h)$

練習２３） $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，１次の近似式を作れ。

(1) e^x　　(2) $\log(1+x)$　　(3) $\dfrac{1}{1+x}$

微分法の応用【近似式】 練習問題

練習２４） 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{1.03}$ (2) $\log 1.01$ (3) $\dfrac{1}{0.998}$

問題１１） $\sin 31^\circ$ の近似値を，1 次の近似式を用いて，小数第 3 位まで求めよ。ただし，$\pi = 3.142$，$\sqrt{3} = 1.732$ とする。

練習２２） $h \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数の値について，1 次の近似式を作れ。

(1) $\cos(a+h)$　　　(2) $\tan(a+h)$

(解説)

(1) $(\cos x)'=-\sin x$ であるから，$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\cos(a+h) \fallingdotseq \cos a - h\sin a$$

(2) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから，$h \fallingdotseq 0$ のとき

$$\tan(a+h) \fallingdotseq \tan a + \frac{h}{\cos^2 a}$$

練習２３） $x \fallingdotseq 0$ のとき，次の関数について，1 次の近似式を作れ。

(1) e^x　　　(2) $\log(1+x)$　　　(3) $\dfrac{1}{1+x}$

(解説)

(1) $f(x)=e^x$ について　　$f'(x)=e^x$

よって　　$f(0)=1$，$f'(0)=1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$e^x \fallingdotseq 1+x$

(2) $f(x)=\log(1+x)$ について　　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

よって　　$f(0)=0$，$f'(0)=1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\log(1+x) \fallingdotseq x$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ について　　$f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

よって　　$f(0)=1$，$f'(0)=-1$

これらを，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ に代入して

$x \fallingdotseq 0$ のとき　　$\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$

練習２４） 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{1.03}$　　(2) $\log 1.01$　　(3) $\dfrac{1}{0.998}$

(解説)

(1)　$x \fallingdotseq 0$ のとき　$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

$\sqrt[4]{1.03}=(1+0.03)^{\frac{1}{4}}$ であるから

$$\sqrt[4]{1.03} \fallingdotseq 1+\frac{1}{4}\times 0.03=1.0075$$

(2)　$x \fallingdotseq 0$ のとき　$\log(1+x) \fallingdotseq x$

$\log 1.01=\log(1+0.01)$ であるから

$$\log 1.01 \fallingdotseq 0.01$$

(3)　$x \fallingdotseq 0$ のとき　$\dfrac{1}{1+x} \fallingdotseq 1-x$

$\dfrac{1}{0.998}=\dfrac{1}{1+(-0.002)}$ であるから

$$\frac{1}{0.998} \fallingdotseq 1-(-0.002)=1.002$$

問題１１） $\sin 31^\circ$ の近似値を，1 次の近似式を用いて，小数第 3 位まで求めよ。ただし，$\pi=3.142$，$\sqrt{3}=1.732$ とする。

(解説)

$(\sin x)'=\cos x$ であるから

$h \fallingdotseq 0$ のとき　$\sin(a+h) \fallingdotseq \sin a+h\cos a$

よって

$$\sin 31^\circ=\sin(30^\circ+1^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\fallingdotseq \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$\sin 31^\circ \fallingdotseq \frac{1}{2}+\frac{3.142}{180}\cdot\frac{1.732}{2} \fallingdotseq 0.515$$