

【内容目標】無限等比数列の収束条件を理解しよう！

初項に一定の数 r (公比) を次々と掛けて得られる項が無限に続く等比数列を **無限等比数列** という。

初項 r , 公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限を調べてみよう。

[1] $r > 1$ のとき $r = 1 + h$ とおくと $h > 0, r^n = (1 + h)^n$
 二項定理により $(1 + h)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2 + \dots + {}_n C_n h^n$

$$= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \dots + h^n$$

$h > 0$ であるから $r^n \geq 1 + nh$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$

[2] $r = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

[3] $0 < r < 1$ のとき $\frac{1}{r} = s$ とおくと $s > 1, r^n = \frac{1}{s^n}$

[1] により, $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s^n} = 0$

[4] $r = 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

[5] $-1 < r < 0$ のとき $-r = s$ とおくと $0 < s < 1, |r^n| = s^n$

[3] により, $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = 0$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ← $-|r^n| \leq r^n \leq |r^n|$

[6] $r = -1$ のとき 数列 $\{r^n\}$ は, $-1, 1, -1, \dots$ となる。

よって, 数列 $\{r^n\}$ は振動する。すなわち, 極限はない。

[7] $r < -1$ のとき $-r = s$ とおくと $s > 1, r^n = (-1)^n s^n$

[1] により, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ で, 数列 $\{r^n\}$ の項の符号は交互

に変わる。よって, 数列 $\{r^n\}$ は振動する。すなわち, 極限はない。

□[3], [4], [5] より, $-1 < r < 1$ すなわち $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるので

数列 $\{r^n\}$ の極限		
$r > 1$ のとき	$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$	正の無限大に発散する
$r = 1$ のとき	$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$	} 収束する
$ r < 1$ ($-1 < r < 1$) のとき	$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$	
$r \leq -1$ のとき	振動する …… 極限はない	

□[3], [4], [5], [6] より,

数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は, $-1 < r \leq 1$ である。

例4) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

- (1) $(\sqrt{2})^n$ (2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (3) $(-2)^n$

解説

- (1) 数列 $\{(\sqrt{2})^n\}$ では $\sqrt{2} > 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n = \infty$
 (2) 数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ では $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ ($-1 < -\frac{1}{2} < 1$) であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$
 (3) 数列 $\{(-2)^n\}$ では $-2 < -1$ であるから、極限はない。振動する。

例5) 数列 $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

解説

数列 $\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < \frac{x}{2} \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad -2 < x \leq 2$$

極限値は

$$-1 < \frac{x}{2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad -2 < x < 2 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 0$$

$$\frac{x}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = 2 \quad \text{のとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 1$$

例題2) 次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^n}{4^n - 3^n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n + 2^n}$

解説

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^n}{4^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 4$ 分母と分子を分母の大きい方の項 (4^n) で割る

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \infty$ 分母と分子を分母の大きい方の項 (3^n) で割る

応用例題 2) 数列 $\left\{ \frac{r^n}{1+r^n} \right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

(1) $|r| < 1$

(2) $r < -1$

解説

(1) $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \frac{0}{1+0} = 0$$

(2) $r < -1$ のとき、 $\left| \frac{1}{r} \right| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r} \right)^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

□ 漸化式で表された数列の極限

応用例題 3) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

解説

与えられた漸化式を変形すると $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

よって、数列 $\{a_n - 2\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は、 $a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$ であるから

$$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

関数と極限【無限等比数列】 p.100~103 練習問題

練習7) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$

(4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

練習8) 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限值を求めよ。

練習9) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n}$

関数と極限【無限等比数列】 p.100~103 練習問題

練習 1 0) 数列 $\left\{ \frac{1-r^n}{1+r^n} \right\}$ の極限を, 次の各場合について求めよ。

(1) $r > 1$

(2) $r = 1$

(3) $|r| < 1$

(4) $r < -1$

練習 1 1) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

練習7) 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $(\sqrt{3})^n$ (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$ (4) $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

解説

(1) 数列 $\{(\sqrt{3})^n\}$ では $\sqrt{3} > 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3})^n = \infty$

(2) 数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ では $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(3) 数列 $\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)^n\right\}$ では $-\frac{4}{3} < -1$ であるから、極限はない。振動する。

(4) 数列 $\left\{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}$ では $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0$

練習8) 数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

解説

数列 $\{(x-1)^n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$-1 < x-1 \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x \leq 2$$

$-1 < x-1 < 1$ すなわち $0 < x < 2$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)^n = 0$

$x-1=1$ すなわち $x=2$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (x-1)^n = 1$

練習9) 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$ (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n}$

解説

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \infty$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 0$

練習10) 数列 $\left\{\frac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を、次の各場合について求めよ。

- (1) $r > 1$ (2) $r = 1$ (3) $|r| < 1$ (4) $r < -1$

解説

(1) $r > 1$ のとき、 $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

(2) $r = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(3) $|r| < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(4) $r < -1$ のとき、 $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

練習11) 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

解説

与えられた漸化式を変形すると $a_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left(a_n - \frac{3}{4}\right)$

よって、数列 $\left\{a_n - \frac{3}{4}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。

その初項は、 $a_1 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ であるから

$$a_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3}{4}\right) = 0$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$