関数と極限【無限級数】　p.104～105

【内容目標】無限級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになろう。

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ において，a_1 をその 初項，a_n を 第 n 項 という。 無限数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの**部分和** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ を第 n 項として，新たに次の無限数列 $\{S_n\}$ ： S_1，S_2，S_3，……，S_n，……を作る。 無限数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が S のとき，すなわち『 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S$ 』となるとき，無限級数 は S に **収束** する，または無限級数の和 は S であるという。この和 S も $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で書き表すことがある。

> **無限級数の和**
> 無限級数 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ の第 n 項までの部分和 S_n から作られる
> 無限数列 $\{S_n\}$ が S に収束するとき，この無限級数の和は S である。

無限級数の和
＝部分和の極限値

※　無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 は 発散 するという。

例題３） 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots\cdots$$

部分分数分解
$$\frac{1}{大-小}\left(\frac{1}{小} - \frac{1}{大}\right)$$

解答　$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{(n+1)-n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

和の一般項を用いて極限を考えよ！

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

よって　$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

したがって，この無限級数は収束して，その和は 1 である。

例題４） 次の無限級数は発散することを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots\cdots$$

解答　$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

分母の有理化

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots\cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \sqrt{n+1} - 1$$

打ち消し合う

よって　$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

したがって，この無限級数は発散する。

関数と極限【無限級数】　p.104～105　**練習問題**

$\boxed{1}$ **練習１２）** 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots\cdots$

$\boxed{2}$ 次の無限級数の和を求めよ。

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots$$

【会津大】

$\boxed{3}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ の和を求めよ。

【早稲田大】

関数と極限【無限級数】　p.104～105　練習問題

1　**練習１２）** 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots\cdots$

解説

(1) $$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{1}{2}$ である。

(2) $$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}&=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\end{aligned}$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

関数と極限【無限級数】 p.104～105 練習問題

2 次の無限級数の和を求めよ。

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots$$

【会津大】

（解説）

第 n 項を a_n，第 n 項までの部分和を S_n とすると，

$a_n=\dfrac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$ であるから

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって，求める和は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$

3 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ の和を求めよ。

【早稲田大】

（解説）

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ の第 n 項までの部分和を S_n とする。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$