関数と極限【無限等比級数】　p.106～107

【内容目標】無限等比級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになろう。

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots \qquad ①$$

を，初項 a，公比 r の **無限等比級数** という。①の第 n 項までの部分和を S_n とする。

□無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ の収束，発散は，次のようになる。

$a=0$ のとき　収束し，その和は 0 である。

$a \fallingdotseq 0$ のとき　$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geqq 1$ ならば発散する。

また，無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ が**収束するための必要十分条件**は

$$\boxed{a=0 \quad \text{または} \quad |r|<1}$$

例題５） 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$　　　(2)　初項 1，公比 $-\sqrt{3}$

解答　(1)　初項が 2，公比について $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，　|公比|＜1

その和は　$\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}}=3$　　$\dfrac{\text{初項}}{1-\text{公比}}$

(2)　初項が 1，公比について $|-\sqrt{3}|>1$ であるから，発散する。　|公比|≧1

例題６） 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots\cdots$$

解答　初項が x，公比が $1-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x=0$　または　$|1-x|<1$　　初項＝0　または　|公比|＜1

$|1-x|<1$ のとき

$-1<1-x<1$　すなわち　$0<x<2$　　|○|＜1 ⟹ −1＜○＜1

よって，求める x の値の範囲は　$0 \leqq x < 2$　　初項の条件を合わせる

関数と極限【無限等比級数】　p.106～107 練習問題

1 **練習１３）** 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) 初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$

(2) 初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\cdots\cdots$

(4) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

2 **練習１４）** 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1) $1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots\cdots$

(2) $x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots\cdots$

関数と極限【無限等比級数】　p.106～107 練習問題

3 (1) 実数 x について，等式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\boxed{\text{ア}}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$ が成り立つ。

(2) $0\leqq x<2\pi$ を満たす実数 x について，無限等比級数

$$1+(\sin x-\sqrt{3}\cos x)+(\sin x-\sqrt{3}\cos x)^2+(\sin x-\sqrt{3}\cos x)^3+\cdots\cdots$$

は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}<x<\dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ で収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\boxed{\text{ケ}}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}\right)}$$ である。

【金沢工業大】

関数と極限【無限等比級数】　p.106〜107 練習問題

$\boxed{1}$ **練習１３）** 次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$　　(2)　初項 $\sqrt{2}$，公比 $-\sqrt{2}$

(3)　$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\cdots\cdots$　　(4)　$(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$

(解説)

(1)　初項が 1，公比について $\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

(2)　初項が $\sqrt{2}$，公比について $|-\sqrt{2}|>1$ であるから，発散する。

(3)　公比 $r=-\dfrac{1}{3}$

初項が 1，公比について $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

(4)　公比 $r=\sqrt{2}-1$

初項が $\sqrt{2}+1$，公比について $|\sqrt{2}-1|<1$ であるから収束して，その和は

$$\frac{\sqrt{2}+1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{4+3\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{2}$ **練習１４）** 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(1)　$1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots\cdots$　　(2)　$x+x(2-x)+x(2-x)^2+\cdots\cdots$

(解説)

(1)　初項が 1，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は $|2-x|<1$ より　　$-1<2-x<1$

よって　　$1<x<3$

(2)　初項が x，公比が $2-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　　$x=0$ または $|2-x|<1$

$|2-x|<1$ より　　$1<x<3$

よって，求める x の値の範囲は　　$x=0$，$1<x<3$

3 (1) 実数 x について，等式 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\boxed{\text{ア}}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}\right)$ が成り立つ。

(2) $0\leqq x<2\pi$ を満たす実数 x について，無限等比級数

$$1+(\sin x-\sqrt{3}\cos x)+(\sin x-\sqrt{3}\cos x)^2+(\sin x-\sqrt{3}\cos x)^3+\cdots\cdots$$

は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}<x<\dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ で収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\boxed{\text{ケ}}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}\right)}$$ である。

【金沢工業大】

(解説)

(1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$={}^{ア}2\sin\left(x-\frac{\pi}{{}^{イ}3}\right)$$

(2) この無限等比級数が収束するための条件は

$$|\sin x-\sqrt{3}\cos x|<1$$

すなわち，$\left|2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|<1$ であるから　$-\dfrac{1}{2}<\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<\dfrac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$ であるから，① を満たすとき

$$-\frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{7}{6}\pi$$

すなわち，$\dfrac{\pi}{{}^{ウ}6}<x<\dfrac{\pi}{{}^{エ}2}$，$\dfrac{{}^{オ}7}{{}^{カ}6}\pi<x<\dfrac{{}^{キ}3}{{}^{ク}2}\pi$ のとき，この無限等比級数は収束し，その和は

$$\frac{1}{1-{}^{ケ}2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{{}^{コ}3}\right)}$$