関数と極限【点の運動と無限等比級数】　p.108

【内容目標】無限等比級数の収束、発散を調べて、和を求められるようになろう。

初項が a，公比が r の無限等比数列から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots \qquad ①$$

を，初項 a，公比 r の **無限等比級数** という。①の第 n 項までの部分和を S_n とする。

□無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ の収束，発散は，次のようになる。

$a=0$ のとき　収束し，その和は 0 である。

$a \fallingdotseq 0$ のとき　$|r|<1$ ならば収束し，その和は $\dfrac{a}{1-r}$ である。

$|r| \geqq 1$ ならば発散する。

また，無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots$ が収束するための必要十分条件は

$$a=0 \quad \text{または} \quad |r|<1$$

応用例題４） 数直線上で，点 P が原点 O から出発して，正の向きに 1 だけ進み，次に負の向きに $\dfrac{1}{2}$ だけ進む。更に，正の向きに $\dfrac{1}{2^2}$ だけ進み，次に負の向きに $\dfrac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

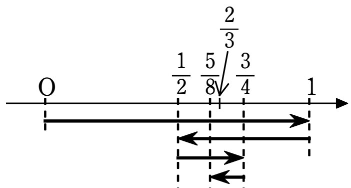
(解説)

点 P の座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots\cdots$$

ゆえに，点 P が近づいていく点の座標を x とすると，

x は初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数で表される。



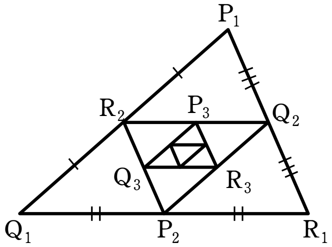
$\left|-\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$x = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

よって，点 P が近づいていく点の座標 x は　　$x=\dfrac{2}{3}$

関数と極限【循環小数と無限等比級数】　p.109

例題） 面積が a の $\triangle \mathrm{P_1Q_1R_1}$ がある。右の図のように，$\triangle \mathrm{P_1Q_1R_1}$ の各辺の中点を頂点として $\triangle \mathrm{P_2Q_2R_2}$ を作り，次に $\triangle \mathrm{P_2Q_2R_2}$ の各辺の中点を頂点として $\triangle \mathrm{P_3Q_3R_3}$ を作る。
以下，同様にして作られる次の三角形の面積の総和 S を求めよ。



　$\triangle \mathrm{P_1Q_1R_1}$，$\triangle \mathrm{P_2Q_2R_2}$，$\triangle \mathrm{P_3Q_3R_3}$，……，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$，……

解説

$$\triangle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1} \backsim \triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$$

であり，相似比は $1:2$ であるから，面積比は $1^2:2^2$ である。
$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ の面積を S_n とすると　$S_{n+1}:S_n=1^2:2^2$　$\therefore\ 2^2S_{n+1}=1^2S_n$

$$S_{n+1}=\frac{1^2}{2^2}S_n=\frac{1}{4}S_n,\ S_1=a$$

よって，数列 $\{S_n\}$ は初項 a，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比数列である。

ゆえに，面積の総和 S は，初項 a，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数で表され，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$ であるから収束する。

したがって　$S=\dfrac{a}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}a$

□循環小数と無限等比級数

例６） 循環小数 $0.3\dot{1}\dot{8}$ を分数で表す。

$$\begin{aligned}0.3\dot{1}\dot{8}&=0.3181818181818181818181818\cdots\\&=0.3+0.018+0.00018+0.0000018+\cdots\cdots\end{aligned}$$

○桁循環
→ $10^{-○}$

であり，右辺の第２項以降は，初項 0.018，公比 $10^{-2}=\dfrac{1}{100}=0.01$ の無限等比級数となる。公比について，$|0.01|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$\begin{aligned}0.3\dot{1}\dot{8}&=0.3+\frac{0.018}{1-0.01}\\&=\frac{3}{10}+\frac{18}{990}\\&=\frac{315}{990}\\&=\frac{7}{22}\end{aligned}$$

終

関数と極限【無限級数の性質】　p.109～110

□無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき，「数列の極限の性質 (1) 」から，次の性質が得られる。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ と考えれば、
数列の極限の性質が使える

> 無限級数の性質
>
> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ のとき
>
> 1　$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$　　ただし，k は定数
>
> 2　$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$，　$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$

例題７） 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$ の和を求めよ。

まずは収束するか確認する

解答　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$，$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから，これらの無限等比級数は

ともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

□無限級数の収束・発散と項の極限

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散と，数列 $\{a_n\}$ の極限について調べよう。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，その和を S，第 n 項までの部分和をS_n とすると，数列 $\{S_n\}$ は S に収束する。

$n \geqq 2$ ならば　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$　よって　$a_n = S_n - S_{n-1}$

この無限級数が収束するとき，その和を S とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

これより，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ。

収束するなら
足していくものが 0 に近付く

関数と極限【無限級数の収束・発散と項の極限】 p.110～111

前ページで調べたことから，次が成り立つ。２は１の対偶である。

1　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

＜注意＞　１，２の逆は成り立たない。（$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない）

たとえば，例題４ の無限級数について，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ であるが無限級数は発散する。

例７） 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ の収束，発散を調べる。

第 n 項を a_n とすると　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$

一般項が１に収束 →その和は発散

$\lim_{n\to\infty} a_n \fallingdotseq 0$ であるから，この無限級数は発散する。　終

コラム　$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ は発散する？

無限級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$ の第８項までの和について

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2}$$

となります。同様にして，一般に第 2^m 項までの部分和 S_{2^m} について，$S_{2^m} \geqq 1+\dfrac{m}{2}$ が成り立つ

ことがわかります。このことから，この無限級数は発散することを示してみましょう。

証明

$$S_{2^m} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{m}{2}$$

$\lim_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{m}{2}\right)=\infty$ から$\lim_{m\to\infty} S_{2^m}=\infty$ であり、$\lim_{m\to\infty} S_{2^m}=\infty$ から 部分和 S_n も

$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ となり、無限級数は正の無限大に発散する。

関数と極限【点の運動と無限等比級数】【循環小数と無限等比級数】

練習１５） 数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^6}$ と進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ。

練習１６） 次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{6}$　　(2)　$0.2\dot{3}\dot{4}$　　(3)　$0.4\dot{7}0\dot{2}$

関数と極限【無限級数の性質】【無限級数の収束・発散と項の極限】

練習１７） 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

練習１８） 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$ は発散することを示せ。

関数と極限【点の運動と無限等比級数】【循環小数と無限等比級数】

練習１５）数直線上で，点 P が原点 O から正の向きに 1 だけ進み，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^2}$，そこから正の向きに $\dfrac{1}{2^4}$，そこから負の向きに $\dfrac{1}{2^6}$ と進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P の極限の位置の座標を求めよ。

(解説)

点 P の座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4},\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^6},\ \cdots\cdots$$

よって，点 P の極限の位置の座標は，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ の無限等比級数で表される。

公比について $\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)}=\frac{4}{5}$$

したがって，点 P の極限の位置の座標は　$\dfrac{4}{5}$

練習１６）次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{6}$　　(2)　$0.2\dot{3}\dot{4}$　　(3)　$0.4\dot{7}0\dot{2}$

(解説)

(1)　$0.\dot{6}=0.6+0.06+0.006+\cdots\cdots$

よって，$0.\dot{6}$ は初項 0.6，公比 0.1 の無限等比級数である。

$|0.1|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.\dot{6}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}$$

(2)　$0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+0.034+0.00034+\cdots\cdots$

この右辺の第 2 項以降は，初項 0.034，公比 0.01 の無限等比級数である。

$|0.01|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.2\dot{3}\dot{4}=0.2+\frac{0.034}{1-0.01}=\frac{2}{10}+\frac{34}{990}=\frac{232}{990}=\frac{116}{495}$$

(3)　$0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+0.0702+0.0000702+\cdots\cdots$

この右辺の第 2 項以降は，初項 0.0702，公比 0.001 の無限等比級数である。

$|0.001|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$0.4\dot{7}0\dot{2}=0.4+\frac{0.0702}{1-0.001}=\frac{4}{10}+\frac{702}{9990}=\frac{4698}{9990}=\frac{87}{185}$$

関数と極限【無限級数の性質】【無限級数の収束・発散と項の極限】

練習１７） 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)$　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}$

(解説)

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ は，初項 $\frac{1}{4}$，公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，初項 $\frac{2}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{4}\right|<1$，$\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{2}{3^n}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

(2) $\displaystyle\frac{2^n-3^n}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ は，初項 $\frac{3}{4}$，公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\frac{1}{2}\right|<1$，$\left|\frac{3}{4}\right|<1$ であるから，これらの無限等比級数はともに収束して，それぞれの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1-3=-2$

練習１８） 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$ は発散することを示せ。

(解説)

第 n 項を a_n とすると　　$a_n=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)$

$n\longrightarrow\infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ は発散するから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する。