関数と極限【関数の極限】　p.113～117

【内容目標】関数の極限の計算ができるようになろう。

□関数の極限とその性質

一般に，関数 $f(x)$ において，x が $\underline{a\text{ と異なる値をとりながら}}$ a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の **極限値** または **極限** という。このことを，次のように書き表す。

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

数列の場合と同様に，関数の極限について，次のことが成り立つ。

○極限値と四則　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ とする。

1　$\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$　ただし，k は定数　　2　$\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$

3　$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$　　4　$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　ただし，$\beta \fallingdotseq 0$

x の整式で表される関数や分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などについては，a が関数 $f(x)$ の定義域内の値であれば，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

指数関数，対数関数，三角関数の極限については，123 ページ以降で。

例８） (1)　$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x - 4) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$

(2)　$\lim_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x+3} = \dfrac{2 \cdot (-1) + 1}{-1+3} = -\dfrac{1}{2}$

(3)　$\lim_{x \to 0} \sqrt{x+4} = \sqrt{4} = 2$

不定形ではない、
分母が０にならない のであれば
２年生のとき同様代入で

□極限の計算

極限値の定義からもわかるように，関数 $f(x)$ が $x = a$ で定義されていなくても，$x \longrightarrow a$ のときの極限値が存在することがある。

不定形でも因数分解ができるときは
２年生のとき同様
因数分解→約分で解決

例９） 関数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は，

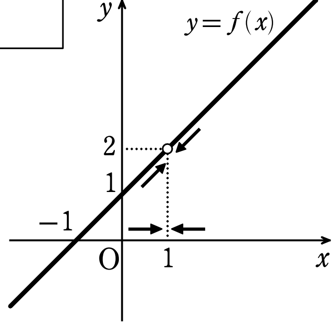
$x = 1$ で定義されていないが，

$x \fallingdotseq 1$ のとき

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

となる。よって

$x \longrightarrow 1$ のとき $f(x) \longrightarrow 2$　終



関数と極限【関数の極限】 p.113～117

例題８） 次の極限を求めよ。**不定形となるとき（分数関数）**

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$ 　$\frac{0}{0}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)$ 　$\infty-\infty$

解答 (1)

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$$

因数分解＋約分で回避

$$=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)$$

$$=3$$

(2)

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(2+x)-2}{2(2+x)}\right\}$$

通分＋約分で回避

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2(2+x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(2+x)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

例題９） 次の極限を求めよ。**不定形となるとき（無理関数を含むとき）**

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

$\frac{0}{0}$

解答

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

分母or分子の有理化で
不定形を解消する

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+4)-2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

関数と極限【関数の極限】 p.113～117

□極限値による定数の決定

例えば $\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=\lim_{x\to1}\left\{\boxed{\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}}\cdot(x-1)\right\}=\boxed{2}\cdot0=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

が成り立つ。つまり $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\text{，}\lim_{x\to a}g(x)=0\text{ならば}\lim_{x\to a}f(x)=0}$ このことを利用する。

応用例題５） 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$$

$\dfrac{f}{g}$ が収束するのに
分母 g が０に収束するなら
分子 f も０に収束して不定
形になるはず

解答 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=2$ …… ①

が成り立つとする。**分母** $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから

分子 $\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$

よって，$a+b=0$ となり　$b=-a$ …… ②

このとき $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)}{x-1}$

②代入 → $\dfrac{0}{0}$ の不定形に

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

有理化

約分

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\frac{a}{2}$$

これで代入しても
不定形でなくなった

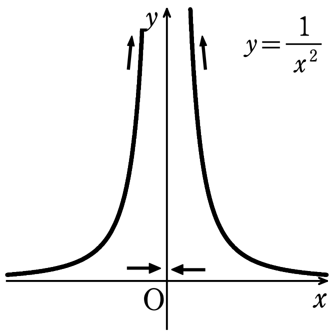
$\dfrac{a}{2}=2$ のとき ① が成り立つから　$a=4$

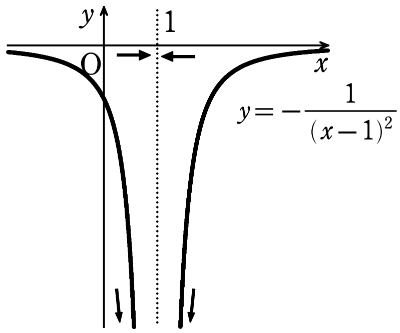
このとき，② から　$b=-4$　　　答　$a=4$，$b=-4$

□極限が有限な値でない場合

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば，「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は **正の無限大に発散** する」 または 「 $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の 極限は ∞ である」といい，「 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ 」 や「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow \infty$ 」のように書き表す。また，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x)$ は 負の無限大に発散 する」 または 「 $x \longrightarrow a$ のときの $f(x)$の極限は $-\infty$ である」といい，「 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ 」や「 $x \longrightarrow a$ のとき $f(x) \longrightarrow -\infty$ 」のように書き表す。 **注意** 極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを関数の<u>極限値</u>とはいわない。

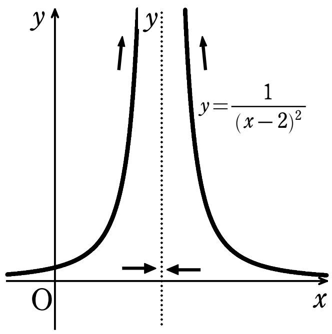
例） $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$　　　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left\{-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}=-\infty$

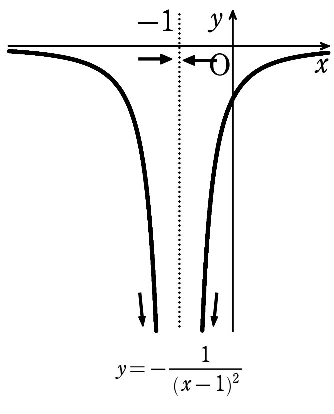


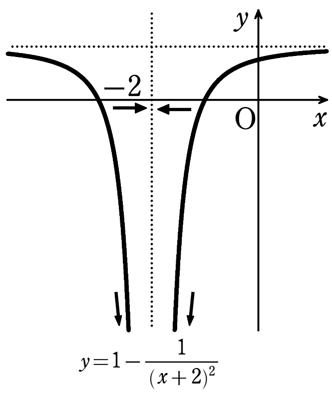


練習２３）　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left\{-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\left\{1-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}=-\infty$







関数と極限【関数の極限】　p.113〜117　練習問題

練習１９） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x^2-3x-1)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to -2}(x-3)(x+2)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2x-3}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x}$

練習２０） 次の極限を求めよ。ただし，(3) の a は 0 でない定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

練習２１） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

関数と極限【関数の極限】 p.113～117 **練習問題**

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

関数と極限【関数の極限】　p.113〜117　練習問題

練習１９） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}$

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}(2x^2-3x-1)=2\cdot1^2-3\cdot1-1=-2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x-3)(x+2)=(-2-3)\cdot(-2+2)=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{0+1}{2\cdot0-3}=-\frac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\sqrt{1-x}=\sqrt{1-(-1)}=\sqrt{2}$

練習２０） 次の極限を求めよ。ただし，(3) の a は 0 でない定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)$

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-3)=-6$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=-3$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{(a+x)-a}{a(a+x)}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{a(a+x)}=\frac{1}{a^2}$

練習２１） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(解説)

(1)
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

(2)
$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-2^2}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)=4$$

関数と極限【関数の極限】 p.113～117 練習問題

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1$

(解説)

(1) $$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=-1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つとする。$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$ であるから

$$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x}+b)=0$$

よって，$\sqrt{2}a+b=0$ となり　$b=-\sqrt{2}a$ $\cdots\cdots$ ②

このとき

$$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$\dfrac{a}{2\sqrt{2}}=-1$ のとき ① が成り立つから　$a=-2\sqrt{2}$

このとき，② から　$b=-\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=4$　　答 $a=-2\sqrt{2}$，$b=4$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つとする。$\displaystyle\lim_{x\to0}x=0$ であるから

$$\lim_{x\to0}(a\sqrt{x+4}+b)=0$$

よって，$2a+b=0$ となり　$b=-2a$ $\cdots\cdots$ ②

このとき

$$\lim_{x\to0}\frac{a\sqrt{x+4}+b}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{a}{4}$$

$\dfrac{a}{4}=1$ のとき ① が成り立つから　$a=4$

このとき，② から　$b=-2\times4=-8$　　答 $a=4$，$b=-8$