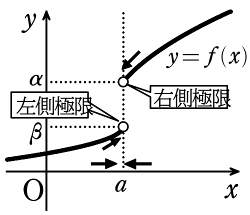
関数と極限【片側からの極限】　p.118～119

【内容目標】右側極限・左側極限の考え方を理解して求められるようになろう。

関数 $f(x)$ において，x が a に限りなく近づくとき，$x>a$ あるいは $x<a$ など片側の範囲だけで極限を考える場合がある。



一般に，$x>a$ の範囲で x が a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の **右側極限** といい，「 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha$ 」のように書き表す。

$x<a$ の範囲で x が a に限りなく近づくときの **左側極限** も同様に定義され，その極限値が β のとき，「 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\beta$ 」のように書き表す。

右側極限，左側極限が ∞ または $-\infty$ になる場合には，たとえば $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ ように書き表す。

$a=0$ のときは，$x\longrightarrow a+0$，$x\longrightarrow a-0$ をそれぞれ「$x\longrightarrow +0$」「$x\longrightarrow -0$ 」のように書く。

関数 $f(x)$ において，次のことが成り立つ。

『 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to a-0} f(x)=\alpha \iff \lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ 』

両側からの極限が
等しいときに
「極限が存在する」
と言える

$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ がともに存在してもそれらが一致しないときもある。**一致しないとき**，$x\longrightarrow a$ のときの $f(x)$ の**極限はない。**

次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}$

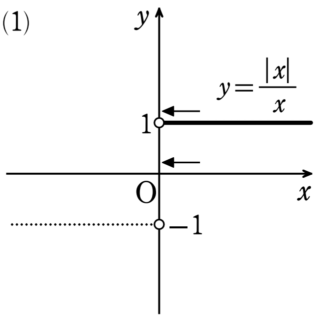
(1)　$x>0$ のとき　$\dfrac{|x|}{x}=1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}1=1$

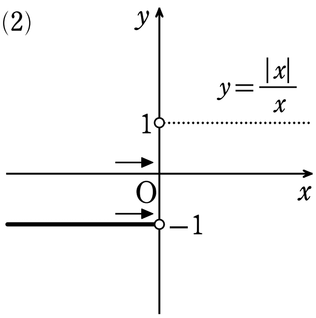
(2)　$x<0$ のとき　$\dfrac{|x|}{x}=-1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-0}(-1)=-1$

(1)



(2)



関数と極限【片側からの極限】　p.114～115

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(3)　$x>1$ のとき

$$\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

よって

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1+0}(x+1)=2$$

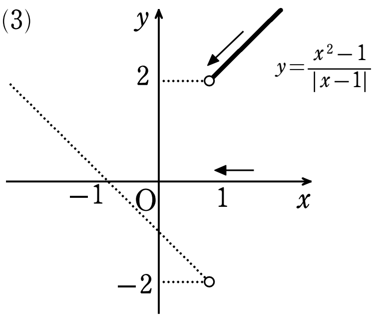
(4)　$x<1$ のとき

$$\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-(x+1)$$

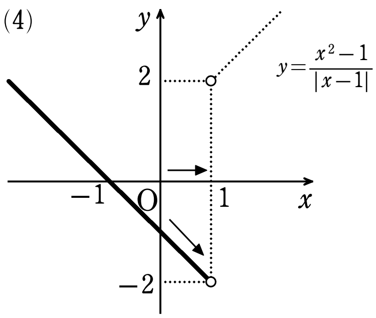
よって

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$$

(3)



(4)



練習２５）次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}$

関数と極限【片側からの極限】　p.114～115

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(3)　$x>1$ のとき

$$\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$$

よって

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2$$

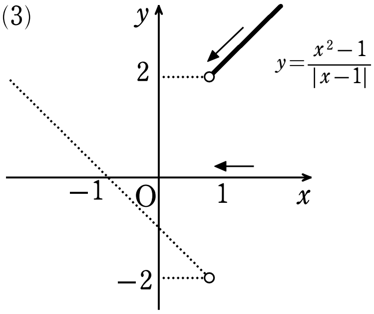
(4)　$x<1$ のとき

$$\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-(x+1)$$

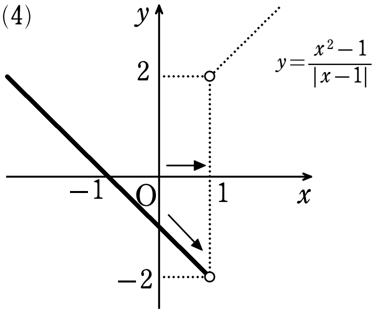
よって

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$$

(3)



(4)



練習２５）次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$