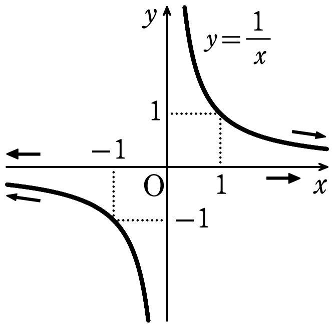
関数と極限【 $x \to \pm\infty$ のときの極限】 p.120～122

【内容目標】 $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ のときの極限値を求められるようになろう。

変数 x が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow \infty$ で書き表す。また，x が負で，その絶対値が限りなく大きくなることを，$x \longrightarrow -\infty$ で書き表す。

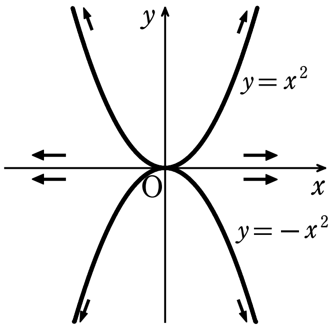


一般に，$x \longrightarrow \infty$ のとき $f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，この値 α を $x \longrightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の **極限値** または **極限** という。このことを，次のように書き表す。

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

$x \longrightarrow -\infty$ のときも同様に考える。たとえば，次のようになる。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$



$x \longrightarrow \infty$ や $x \longrightarrow -\infty$ のときに，関数 $f(x)$ の極限が ∞ または $-\infty$ になる意味も，$x \longrightarrow a$ のときと同様に考える。

たとえば，次のようになる。

$$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}(-x^2)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$$

例１４ 類題）次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1-x^2)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^4-2)$

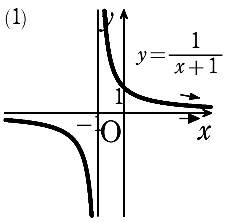
解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0 \leftarrow \frac{定数}{\infty}$ の形　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1 \leftarrow \frac{定数}{-\infty}$ の形　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}=0$

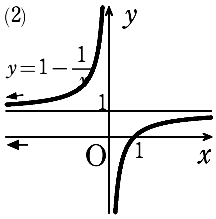
(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1-x^2)=-\infty$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)=-\infty$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^4-2)=\infty$

参考

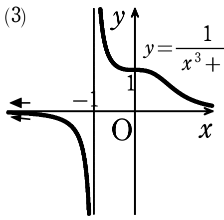
(1)



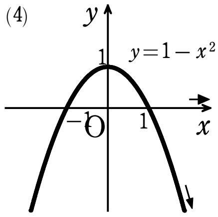
(2)



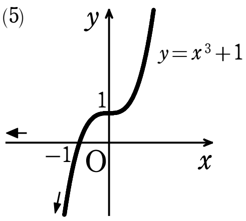
(3)



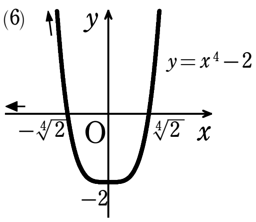
(4)



(5)



(6)



関数と極限【 $x \to \pm\infty$ のときの極限】 p.120～122

例題１０） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}$

(解説)

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2-4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

分母の極限が有限な値となるように分母と分子を x^2 で割る。

$\dfrac{2-0}{3-0+0}$

$$=\frac{2}{3}$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

分母と分子を分母の最高次 x で割る。

$\dfrac{-\infty+0}{1-0}$

$$=-\infty$$

応用例題６） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

(解説)

(1) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

分子の有理化

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+x)-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$

分母分子を x で割る

$$=\frac{1}{4}$$

(2) 方針　$x \longrightarrow -\infty$ だと考えづらいので変換する

$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}-t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

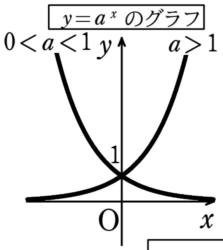
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

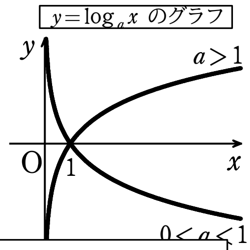
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{t\sqrt{1-\frac{1}{t}}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

関数と極限【指数関数、対数関数の極限】　p.123

□指数関数，対数関数の極限





指数関数の極限については，次のことがいえる。

$a>1$ のとき　$\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

$0<a<1$ のとき $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty$

対数関数の極限については，次のことがいえる。

$a>1$ のとき　$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\infty$，$\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=-\infty$

$0<a<1$ のとき　$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=\infty$

基本の極限は

グラフと合わせて覚えておこう

練習２９） 次の極限を求めよ。

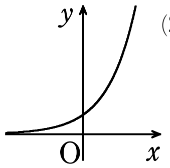
(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$　　底 2 は，$2>1$ であるから　$\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x=0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$　　底 $\frac{1}{3}$ は，$0<\frac{1}{3}<1$ であるから　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

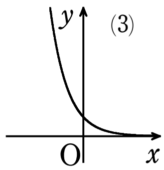
(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2 x$　　底 2 は，$2>1$ であるから　$\lim\limits_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to+0}\log_{0.5} x$　　底 0.5 は，$0<0.5<1$ であるから　$\lim\limits_{x\to+0}\log_{0.5} x=\infty$

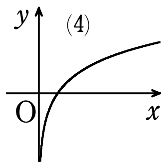
(1)



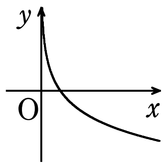
(2)



(3)



(4)



例題１１） 次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-2x}$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+3}{x}$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(3^x-2^{2x})$　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x-1)\}$

解答　(1)　$x\longrightarrow\infty$ のとき $-2x\longrightarrow-\infty$ であるから　$\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-2x}=0$

(2)　$\frac{2x+3}{x}=2+\frac{3}{x}$ であるから，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\frac{2x+3}{x}=2+\boxed{\frac{3}{x}}\longrightarrow 2$

よって　$\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+3}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(2+\boxed{\frac{3}{x}}\right)=\log_2 2=1$

(3)　$\lim\limits_{x\to\infty}(3^x-2^{2x})=\lim\limits_{x\to\infty}(3^x-4^x)=\lim\limits_{x\to\infty}4^x\left\{\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^x}-1\right\}=-\infty$

速いほうでくくる

(2)　$\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x-1)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x-1}$

対数の性質

$=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(4+\boxed{\frac{5}{x-1}}\right)$

$=\log_2 4$

$=2$

$A=B\times Q+R$

$\frac{4(x-1)+5}{x-1}$

別解　$\lim\limits_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x-1)\}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\frac{4+\boxed{\frac{1}{x}}}{1-\boxed{\frac{1}{x}}}$

$=\log_2 4=2$

関数と極限【 $x \to \pm\infty$ のときの極限】

練習２６） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

練習２７） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

関数と極限【 $x \to \pm\infty$ のときの極限】【指数関数、対数関数の極限】

練習２８） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}+2x\right)$

練習３０） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}2^{-3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}$

関数と極限【 $x \to \pm\infty$ のときの極限】

練習２６）次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)$

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)=\infty$

練習２７）次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}$

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+4}{2x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{5}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-x}{3+\frac{2}{x}}=-\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{x^2-4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$

関数と極限【 $x\to\pm\infty$ のときの極限】【指数関数、対数関数の極限】

練習２８） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}+2x\right)$

(解説)

(1)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}+2x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{4t^2-2t}-2t\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4t^2-2t}-2t\right)\left(\sqrt{4t^2-2t}+2t\right)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2-2t)-(2t)^2}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{t\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

練習３０） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}2^{-3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}$

(解説)

(1) $x\longrightarrow\infty$ のとき $-3x\longrightarrow-\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}2^{-3x}=0$

(2) $x\longrightarrow-\infty$ のとき $-2x\longrightarrow\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^{-2x}=\infty$

(3) $\displaystyle\frac{4x-1}{x+2}=\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ であるから，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\displaystyle\frac{4x-1}{x+2}\longrightarrow4$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\log_2 4=2$