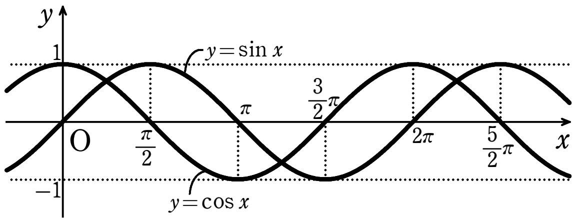
関数と極限【三角関数と極限】　p.124～128

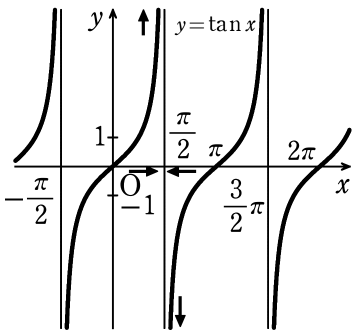
三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は周期関数であり，2π ごとに同じ値を繰り返すから，$x \longrightarrow \infty$ のときの関数の値は一定の値に近づかない。すなわち，$x \longrightarrow \infty$ のときの $\sin x$，$\cos x$ の極限はない。



また，$\tan x$ については，次のことがいえる。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \tan x = \infty$$

注意　$x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ のときの $\tan x$ の極限はない。



例１５）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\sin x = 0$，　$\displaystyle\lim_{x\to0}\cos x = 1$

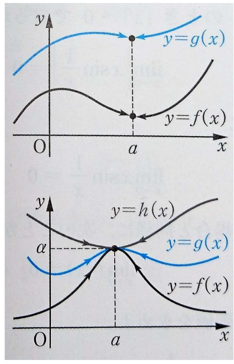
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = 0$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = 1$　終

0に近付く　　0に近付く

> **注意**　遠くにいく（$x\to\pm\infty$）より　近くに来る方が処理しやすかったりする。
>
> そこで $\dfrac{1}{x} = t$ とおくと　$x \longrightarrow \infty$ のとき　$t \longrightarrow +0$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to0}\sin t = 0$

関数の極限には，次の性質もある。

> **関数の極限の性質** (2)　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とする。
>
> 【追い越し禁止】 $x = a$ の近くで常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\alpha \leqq \beta$
>
> 【はさみうちの原理】 $x = a$ の近くで常に
>
> $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ かつ $\alpha = \beta$ ならば　$\displaystyle\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$
>
> ※「$x = a$ の近くで」を「十分大きい x で」と読みかえると，
>
> $x \longrightarrow \infty$ のときにも成り立つ。同様に，$x \longrightarrow -\infty$ のときにも成り立つ。
>
> また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ のとき，次のことも成り立つ。
>
> 十分大きい x で常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$



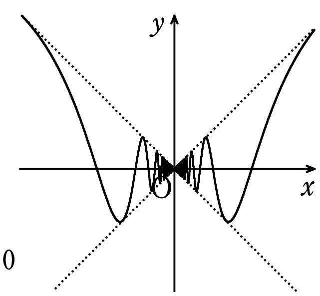
応用例題７）　極限 $\displaystyle\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$ を求めよ。

解答　$0 \leqq \left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ より　　$0 \leqq |x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$

すなわち　　$0 \leqq \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}|x| = 0$ であるから　　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = 0$



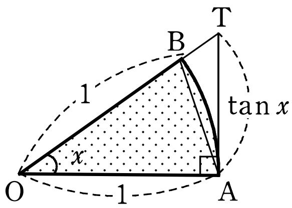
※グラフを見ると明らか

注意　数列の場合と同様に，次のことが成り立つ　　$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a}|f(x)| = 0$

関数と極限【三角関数と極限】 p.124～128

□ 重要 $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

【証明】$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき



右の図のように，半径が 1，中心角が x ラジアンの扇形 OAB の点 A における円の接線と直線 OB の交点を T とすると，面積について

△OAB＜扇形OAB＜△OAT

が成り立つから $\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot \sin x<\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

すなわち $\sin x<x<\tan x$

$\sin x>0$ より $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$ 各辺を $\sin x$ で割った

よって $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$ …… ① 逆数をとる⇒大小反転

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき

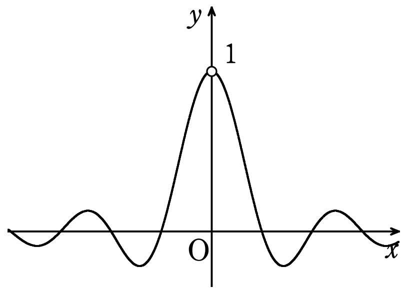
$0<-x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，① により

$1>\dfrac{\sin(-x)}{-x}>\cos(-x)$

すなわち $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

以上から，$x=0$ の近くで

$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$



※グラフにするとこのような感じ

（縦横比はいじってあります）

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ であることと，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

不定形 $\dfrac{0}{0}$ の解消

$$\lim_{●\to 0}\frac{\sin ■}{■}=1 \ (●\to 0 \text{ のとき } ■\to 0)$$ ※上下同じ式！

他にも $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

などはよく見る式である。

関数と極限【三角関数と極限】　p.124～128

例題１２＋α）　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x+\sin 5x}{\sin 2x}$

帳尻合わせ

解答　(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$　上下同じ式に

$=2\cdot1=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot1=\frac{2}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x+\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}+\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{7\cdot\frac{\sin 7x}{7x}+5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}{2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}$

$\displaystyle=\frac{7\cdot1+5\cdot1}{2\cdot1}=6$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x+\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 7x}{\sin 2x}+\frac{\sin 5x}{\sin 2x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}+\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)$

$\displaystyle=\frac{7}{2}\cdot1\cdot1+\frac{5}{2}\cdot1\cdot1=\frac{12}{2}=6$

類問　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　$x\to0$ のときははさみうちの原理で

解説

(1) $x-\frac{\pi}{2}=\theta$ とおくと $x=\theta+\frac{\pi}{2}$ であり，$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to0}\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=-1$

(2) $\frac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

関数と極限【三角関数と極限】　p.124～128

応用例題８＋α） 次の極限を求めよ。

> いかにして$\dfrac{\sin x}{x}$ の形を作るか
>
> ⇒ $\cos\theta$ がらみは
>
> ・$(\cos x+1)(\cos x-1)=\cos^2 x-1$
> $=-\sin^2 x$
>
> ・$\cos 2x=1-2\sin^2 x$
>
> などを活用する！

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

解答　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$　分母分子に $(\cos x+1)$ をかける

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より　$\cos^2 x-1=-\sin^2 x$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}$　$\dfrac{\sin x}{x}$ を作る

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\boxed{\frac{\sin x}{\cos x+1}}\right)$

ここは代入しても問題ない

$\displaystyle=-1\cdot\frac{0}{1+1}$

$=0$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

解答　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$　分母分子に $(1+\cos x)$ をかける

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より　$1-\cos^2 x=\sin^2 x$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$　$\dfrac{\sin x}{x}$ を作る

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot\boxed{(1+\cos x)}\right\}$

ここは代入しても問題ない

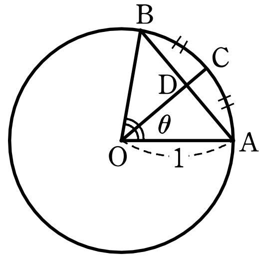
$=1\cdot 2$

$=2$

関数と極限【三角関数と極限】　p.124～128

□三角関数の極限の応用

応用例題９） 半径１の円Ｏの周上に中心角 θ ラジアンの弧 AB をとり，弧 AB を２等分する点を C とする。また，線分 OC と弦AB の交点を D とする。このとき，極限 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}$ を求めよ。



方針 … 線分の長さを θ の関数で表す。

解答　AB⊥OD で，OD は ∠AOB の二等分線であるから　$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\theta}{2}$

よって　　$\mathrm{AB}=2\mathrm{AD}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=1-\cos\dfrac{\theta}{2}$

ABは直角三角形なので定義から求める
（余弦定理を用いると
$\mathrm{AB}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$
となり大変）

したがって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{4\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{8}$$

練習３５） 弧 AB の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表すとき，極限 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}{}^2}$ を求めよ。

解答　AB⊥OD で，OD は ∠AOB の二等分線であるから　$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\theta}{2}$

よって　　$\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=1-\cos\dfrac{\theta}{2}$

また　　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1\cdot\theta=\theta$

半径が r，中心角が θ である扇形の弧の長さは　$l=r\theta$

したがって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}{}^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{\theta}{2}}\right\}=\frac{1}{4}\cdot1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

練習３２） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x}$

練習３３） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

練習３４） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

関数と極限【三角関数と極限】　練習問題

問題１１） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\tan x}{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}+\frac{x}{\tan 2x}\right)$$

【岩手大】

練習３２） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$

(解説)

(1) $0\leqq\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より　$0\leqq\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=0$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$

(2) $0\leqq|\sin x|\leqq 1$ より　$0\leqq\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqq\dfrac{1}{|x|}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(3) $0\leqq|\cos x|\leqq 1$ より　$0\leqq\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|=\dfrac{|\cos x|}{|x|}\leqq\dfrac{1}{|x|}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|=0$　よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

練習３３） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(解説)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot 1=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}$

練習３４） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

(解説)

(1) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{-\frac{x}{\sin x}\cdot(\cos x+1)\right\}=-1\cdot 2=-2\end{aligned}$$

問題１１） 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}$

(解説)

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\cos 2x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{(1-2\sin^2 x)-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}=-\frac{1}{2}$$

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x\tan x}{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}+\frac{x}{\tan 2x}\right)$$

【岩手大】

(解説)

$$\lim_{x\to0}\frac{x\tan x}{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot(\sqrt{\cos 2x}+\cos x)}{\cos 2x-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot(\sqrt{\cos 2x}+\cos x)}{(2\cos^2 x-1)-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\sqrt{\cos 2x}+\cos x)}{-\cos x(1-\cos^2 x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x(\sqrt{\cos 2x}+\cos x)}{-\cos x\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{\cos 2x}+\cos x}{\cos x}\right)$$
$$=-1\cdot\frac{1+1}{1}=-2$$

また　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\tan 2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{x\tan x}{\sqrt{\cos 2x}-\cos x}+\frac{x}{\tan 2x}\right)=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$