関数と極限【関数の連続性】　p.129～131

【内容目標】 定義域におけるグラフが切れ目のない曲線になる関数の性質を理解しよう。

□関数の連続性

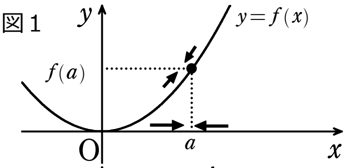
図１


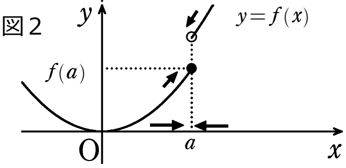
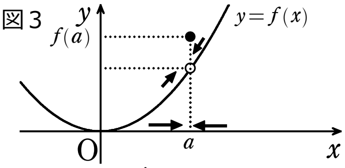
図２


図３


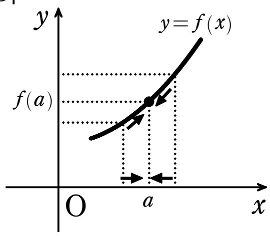
　x の整式で表された関数 $f(x)$ については，定義域内の値 a に対して図１のように

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

が成り立つ。このことは，$y=f(x)$ のグラフが切れ目のない曲線になっているということでもある。しかし，これらのことが成り立たない関数もある。（図２は極限が存在しない。図３は極限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ は存在するが、その値が $f(a)$と等しくない）

　一般に，関数 $f(x)$ において，<u>その定義域内の x の値 a に対して</u>，極限値 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つとき，「$f(x)$ は $x=a$ で **連続** である」という。

このとき，$y=f(x)$ のグラフは $x=a$でつながっている。



注意 関数 $f(x)$ が指数関数，対数関数，三角関数，分数関数であるとき，$f(x)$ はその定義域内のすべての x の値で連続である。

注意 値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ または $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$が成り立つならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

注意 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき，$x=a$ で **不連続** であるという。
このとき，そのグラフは $x=a$ で切れている。

> 補足 関数の極限の性質により，関数 $f(x)$，$g(x)$がともに $x=a$ で連続ならば，
> 次の関数はいずれも $x=a$ で連続である。
>
> $$kf(x),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$
>
> （ただし，k は定数であり，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a)\fallingdotseq 0$ とする）

　値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ

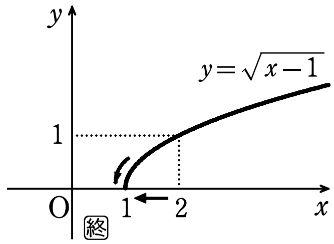
$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$$

が成り立つならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

> 各点連続「$f(x)$ が $x=a$ で**連続**」
>
> $$\Leftrightarrow \begin{cases} (\text{i})\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \text{ が存在する} \quad ※\ \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \\ (\text{ii})\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a) \end{cases}$$
>
> ■ 視覚的には「$y=f(x)$ が $x=a$ で**つながっている**」ということ ■

関数と極限【関数の連続性】　p.129～131

例１８） 関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ の定義域は $x \geqq 1$ である。



$\lim_{x \to 1+0} \sqrt{x-1}=0$，$f(1)=0$ より

$$\lim_{x \to 1+0} f(x)=f(1)$$

が成り立つ。

よって，関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は $x=1$ で連続である。 終

＜注意＞　関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は定義域内のすべての x の値で連続である。

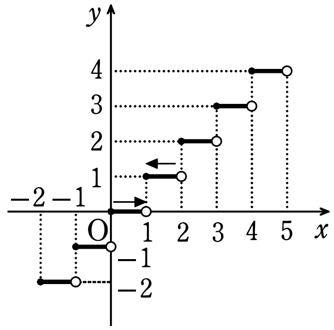
x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

記号 [ ] を ガウス記号 という。

たとえば，$[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$ である。

$f(x)=[x]$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフは

右の図のようになり，x が整数の値をとるところで切れている。



＜補足＞　実数 x について，

$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n が $[x]$ である。

例１９） 関数 $f(x)=[x]$ について

$$\lim_{x \to 1+0} f(x)=1, \quad \lim_{x \to 1-0} f(x)=0$$

であるから，$x \longrightarrow 1$ のときの $f(x)$ の極限はない。

よって，関数 $f(x)=[x]$ は $x=1$ で連続でない。 終

練習３６） 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1)　$f(x)=x[x]$　　(2)　$f(x)=(x+1)[x]$　　(3)　$f(x)=\sqrt{x}$

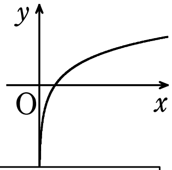
関数と極限【区間における連続】　p.131～132

□区間における連続

集合 $\{x \mid a<x<b\}$，$\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$，$\{x \mid a \leqq x\}$，$\{x \mid x<b\}$ などを **区間** といい，それぞれ $(a,\ b)$，$[a,\ b]$，$[a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b)$ のように書き表す。実数全体の集合は，$(-\infty,\ \infty)$ で表す。

また，区間 $(a,\ b)$ を **開区間** といい，区間 $[a,\ b]$ を **閉区間** という。関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ はその **区間で連続** であるという。また，定義域内のすべての x の値で連続な関数を **連続関数** という。

一般に，関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば，次の関数はいずれも区間 I で連続である。ただし，k は定数とする。　$kf(x)$，$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$　また，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x)=0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され，それらの各区間で連続である。

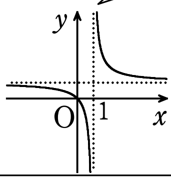


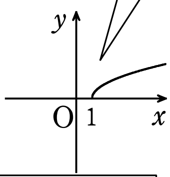
例 (1)　x の整式で表された関数や，指数関数 2^x，三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は，区間　$(-\infty,\ \infty)$ で連続である。

(2)　対数関数 $\log_2 x$ は，区間 $(0,\ \infty)$ で連続である。

(3)　分数関数 $\dfrac{x}{x-1}$ は，実数全体のうち，$x=1$ を除いた 2 つの区間 $(-\infty,\ 1)$，$(1,\ \infty)$ のそれぞれで連続である。

(4)　無理関数 $\sqrt{x-1}$ は，区間 $[1,\ \infty)$ で連続である。





> 補足 $a \leqq x < b$ などは $[\ a,\ b\ )$ などとかき、半開区間という。
>
> 補足 区間 $(-\infty,\ \infty)=\mathbf{R}$ は通常の実数の範囲では閉集合だが、拡大実数の範囲で考えるならばそうではない

練習３７） 次の関数が連続である区間を求めよ。

(1)　$f(x)=\sqrt{1-x}$　　　(2)　$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

□連続関数の性質

【 最大値･最小値の原理 】 ＜Weierstrass＞

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

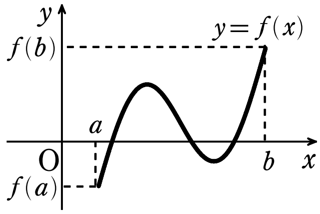
別紙参照

【 中間値の定理 】

関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して　$f(c)=k$，　$a<c<b$　を満たす実数 c が少なくとも 1 つある。

中間値の定理から，次に述べるように，方程式の実数解の範囲を推測するための重要な事実が導かれる。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，**$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば**，方程式 $f(x)=0$ は $a<x<b$ の 範囲に**少なくとも 1 つの実数解をもつ。**



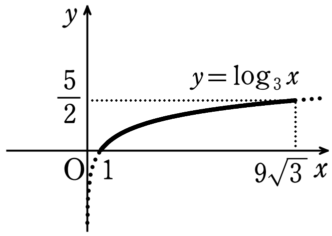
例題） 次の関数は最大値，最小値をもつか。もしもつならば，その値を求めよ。

(1)　$y=\log_3 x$ $(1 \leqq x \leqq 9\sqrt{3})$　　(2)　$y=-\cos 2x$ $(0<x<\pi)$

解答　(1)　$y=\log_3 x$ $(1 \leqq x \leqq 9\sqrt{3})$ は，閉区間 $[1,\ 9\sqrt{3}]$ で連続であるから，この区間で最大値および最小値をもつ。

$x=9\sqrt{3}$ のとき　最大値 $\dfrac{5}{2}$

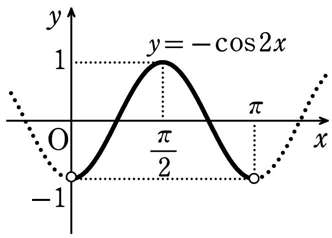
$x=1$ のとき　最小値 0



(2)　$y=-\cos 2x$ $(0<x<\pi)$ の値域は $-1<y \leqq 1$ であるから

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値 1

最小値はもたない



練習３９） 方程式 $2^x-3x=0$ は $3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

関数と極限【関数の連続性】 p.129～131

【内容目標】 定義域におけるグラフが切れ目のない曲線になる関数の性質を理解しよう。

□関数の連続性

x の整式で表された関数 $f(x)$ については，定義域内の値 a に対して図 1 のように

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

が成り立つ。このことは，$y=f(x)$ のグラフが切れ目のない曲線になっているということでもある。しかし，これらのことが成り立たない関数もある。（図 2 は極限が存在しない。図 3 は極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ は存在するが、その値が $f(a)$と等しくない）

図 1

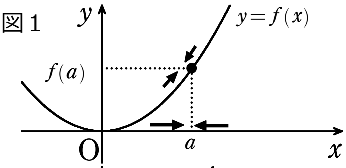


図 2

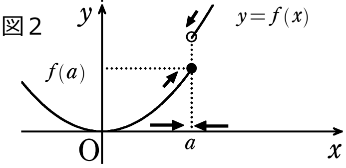
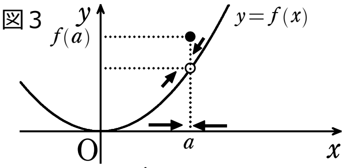
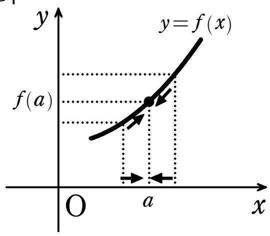


図 3



一般に，関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対して，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し，かつ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つとき，「$f(x)$ は $x=a$ で **連続** である」という。

このとき，$y=f(x)$ のグラフは $x=a$でつながっている。



注意 関数 $f(x)$ が指数関数，対数関数，三角関数，分数関数であるとき，$f(x)$ はその定義域内のすべての x の値で連続である。

注意 値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ $\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ または $\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$ が成り立つならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

注意 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとき，$x=a$ で **不連続** であるという。

このとき，そのグラフは $x=a$ で切れている。

補足 関数の極限の性質により，関数 $f(x)$，$g(x)$がともに $x=a$ で連続ならば，次の関数はいずれも $x=a$ で連続である。

$$kf(x),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

（ただし，k は定数であり，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ においては $g(a)\neq 0$ とする）

値 a が関数 $f(x)$ の定義域の左端または右端であるときは，それぞれ

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \qquad \text{または} \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$$

が成り立つならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続であるという。

各点連続「$f(x)$ が $x=a$ で**連続**」

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\text{i})\ \lim_{x\to a} f(x) \text{ が存在する} \quad ※\ \lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x) \\ (\text{ii})\ \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \end{cases}$$

■ 視覚的には「$y=f(x)$ が $x=a$ で**つながっている**」ということ ■

関数と極限【関数の連続性】　p.129～131

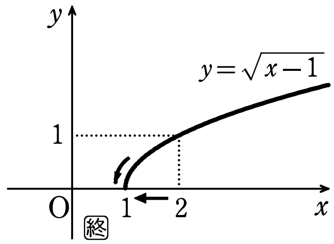
例１８） 関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ の定義域は $x \geqq 1$ である。

$\lim\limits_{x\to1+0}\sqrt{x-1}=0$，$f(1)=0$ より

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$$

が成り立つ。

よって，関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は $x=1$ で連続である。　終



<注意>　関数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ は定義域内のすべての x の値で連続である。

x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

記号 [ ] を ガウス記号 という。

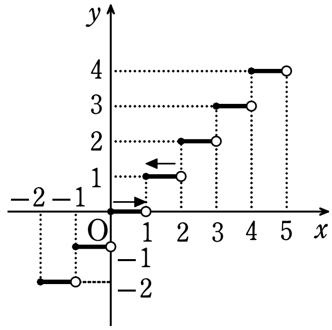
たとえば，$[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$ である。

$f(x)=[x]$ とすると，関数 $y=f(x)$ のグラフは

右の図のようになり，x が整数の値をとるところで切れている。

<補足>　実数 x について，

$n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n が $[x]$ である。



例１９） 関数 $f(x)=[x]$ について

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=1,\quad \lim_{x\to1-0}f(x)=0$$

であるから，$x\longrightarrow 1$ のときの $f(x)$ の極限はない。

よって，関数 $f(x)=[x]$ は $x=1$ で連続でない。　終

練習３６） 次の関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続であるか不連続であるかを調べよ。

(1)　$f(x)=x[x]$　　(2)　$f(x)=(x+1)[x]$　　(3)　$f(x)=\sqrt{x}$

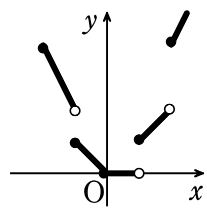
解説

(1)　$\lim\limits_{x\to-0}x[x]=0\cdot(-1)=0$，$\lim\limits_{x\to+0}x[x]=0\cdot0=0$

よって　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$　また　$f(0)=0\cdot0=0$

したがって，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ が成り立つから，

関数 $f(x)=x[x]$ は $x=0$ で連続である。

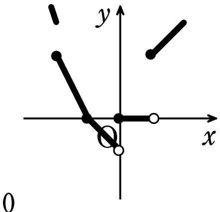


(2)　$\lim\limits_{x\to-0}(x+1)[x]=1\cdot(-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to+0}(x+1)[x]=1\cdot0=0$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの $f(x)$ の極限はない。

したがって，関数 $f(x)=(x+1)[x]$ は

$x=0$ で不連続である。



(3)　関数 $f(x)=\sqrt{x}$ の定義域は $x \geqq 0$ で　$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$，$f(0)=0$

したがって，$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=f(0)$ が成り立つから，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は $x=0$ で連続である。

関数と極限【区間における連続】 p.131～132

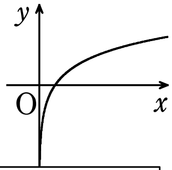
□区間における連続

集合 $\{x \mid a<x<b\}$, $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$, $\{x \mid a \leqq x\}$, $\{x \mid x<b\}$ などを **区間** といい，それぞれ $(a,\ b)$, $[a,\ b]$, $[a,\ \infty)$, $(-\infty,\ b)$ のように書き表す。実数全体の集合は，$(-\infty,\ \infty)$ で表す。

また，区間 $(a,\ b)$ を **開区間** といい，区間 $[a,\ b]$ を **閉区間** という。関数 $f(x)$ が，ある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ はその **区間で連続** であるという。また，定義域内のすべての x の値で連続な関数を **連続関数** という。

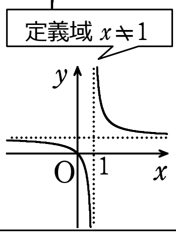
一般に，関数 $f(x)$ と $g(x)$ が区間 I でともに連続ならば，次の関数はいずれも区間 I で連続である。ただし，k は定数とする。 $kf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ また，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は区間 I から $g(x)=0$ となる x の値を除いたそれぞれの区間で定義され，それらの各区間で連続である。

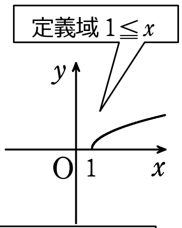
定義域に制限なし⇒実数全体



例 (1) x の整式で表された関数や，指数関数 2^x，三角関数 $\sin x$, $\cos x$ は，区間 $(-\infty,\ \infty)$ で連続である。

(2) 対数関数 $\log_2 x$ は，区間 $(0,\ \infty)$ で連続である。





(3) 分数関数 $\dfrac{x}{x-1}$ は，実数全体のうち，$x=1$ を除いた 2 つの区間 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$ のそれぞれで連続である。

(4) 無理関数 $\sqrt{x-1}$ は，区間 $[1,\ \infty)$ で連続である。

> 補足 $a \leqq x < b$ などは $[\ a,\ b\ )$ などとかき、半開区間という。
>
> 補足 区間 $(-\infty,\ \infty)=\mathbf{R}$ は通常の実数の範囲では閉集合だが、拡大実数の範囲で考えるならばそうではない

練習３７） 次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x)=\sqrt{1-x}$ (2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

(解説)

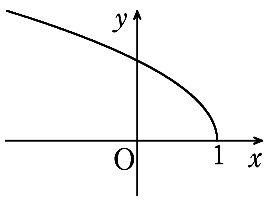
(1) $f(x)=\sqrt{-(x-1)}$

定義域 $1-x \geqq 0$ より $x \leqq 1$

定義域を区間にする

よって 関数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ が

連続である区間は $(-\infty,\ 1]$



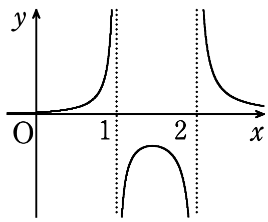
(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}$

定義域は $x \fallingdotseq 1$, $x \fallingdotseq 2$

定義域を区間にする

関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ が

連続である区間は $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$



関数と極限【連続関数の性質】　p.132～133

□連続関数の性質

【 最大値・最小値の原理 】 ＜Weierstrass＞

閉区間で連続な関数は，その区間で最大値および最小値をもつ。

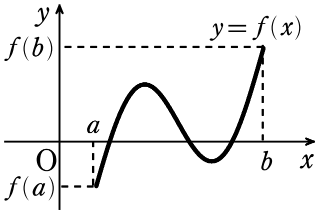
別紙参照

【 中間値の定理 】

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して　$f(c)=k$,　　$a<c<b$　を満たす実数 c が少なくとも 1 つある。

中間値の定理から，次に述べるように，方程式の実数解の範囲を推測するための重要な事実が導かれる。

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，**$f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なれば**，方程式 $f(x)=0$ は $a<x<b$ の 範囲に**少なくとも 1 つの実数解をもつ。**



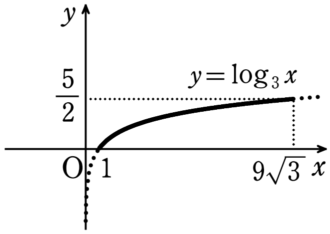
例題） 次の関数は最大値，最小値をもつか。もしもつならば，その値を求めよ。

(1)　$y=\log_3 x$ $(1 \leqq x \leqq 9\sqrt{3})$　　　　(2)　$y=-\cos 2x$ $(0<x<\pi)$

解答　(1)　$y=\log_3 x$ $(1 \leqq x \leqq 9\sqrt{3})$ は，閉区間 $[1,\ 9\sqrt{3}]$ で連続であるから，この区間で最大値および最小値をもつ。

$x=9\sqrt{3}$ のとき　最大値 $\dfrac{5}{2}$

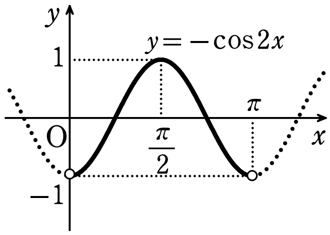
$x=1$ のとき　　最小値 0



(2)　$y=-\cos 2x$ $(0<x<\pi)$ の値域は $-1<y \leqq 1$ であるから

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値 1

最小値はもたない



練習３９） 方程式 $2^x-3x=0$ は $3<x<4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

解説

$f(x)=2^x-3x$ とおくと，関数 $f(x)$ は区間 $[3,\ 4]$ で連続であり，かつ

$f(3)=2^3-3\cdot3=-1<0$

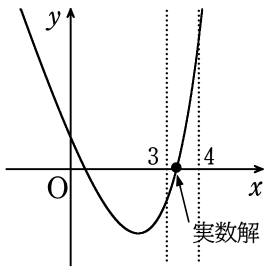
$f(4)=2^4-3\cdot4=4>0$

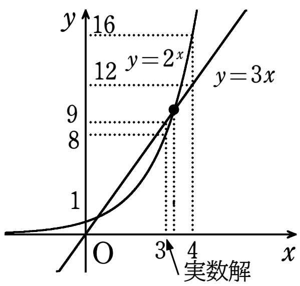
したがって，方程式 $f(x)=0$

すなわち $2^x-3x=0$ は

$3<x<4$ の範囲に

少なくとも 1 つの実数解をもつ。





補足 $2^x-3x=0$ は $y=2^2-3x$ と $y=0$ の共有点だが $2^x=3x$ とみると $y=2^x$ と $y=3x$ の共有点である