関数と極限【分数関数のグラフと不等式】　p.81

【内容目標】分数関数のグラフを利用して不等式を解こう！

応用例題１） 関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の座標を求めよ。

方針　**共有点の x 座標は連立方程式の解！**

解答　$\dfrac{2}{x-1}=x$ より　　$2=x(x-1)$

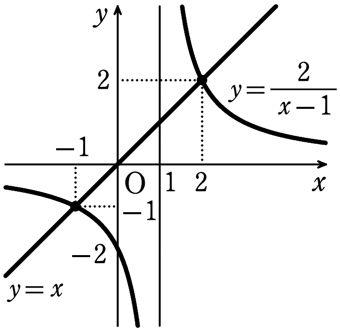
すなわち　　$x^2-x-2=0$

これを解くと　　$x=-1,\ 2$

これが共有点の x 座標である。

$y=x$ であるから，求める共有点の座標は

$(-1,\ -1),\ (2,\ 2)$

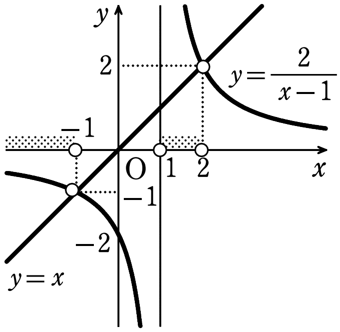


応用例題１つづき） 不等式　$\dfrac{2}{x-1}>x$　を解け。

方針　$y=\dfrac{2}{x-1}$　……①　$y=x$　……②

のグラフの上下関係から考える

大きい方（＞の開いている方）が上になる x の範囲を求める



関数 $y=\dfrac{2}{x-1}$ のグラフが直線 $y=x$ より上側にある

x の値の範囲は図から，　$x<-1,\ 1<x<2$

よって不等式の解は　　$x<-1,\ 1<x<2$

別解　$x-1$ を掛けて両辺を払いたくなるが，負の数を掛けると不等号の向きは変わってしまう

そこで $(x-1)^2$ を掛けることで処理する

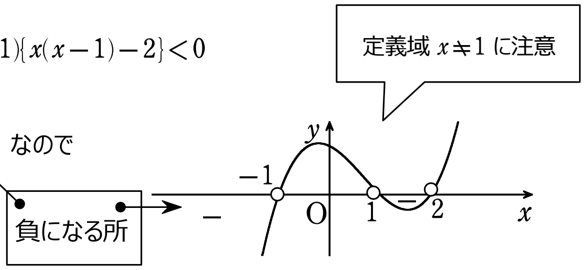
$\dfrac{2}{x-1}>x$ に $(x-1)^2$ を掛けると　$2(x-1)>x(x-1)^2$

$x(x-1)^2-2(x-1)<0$

共通因数でくくって　　$(x-1)\{x(x-1)-2\}<0$

$(x-1)(x^2-x-2)<0$

$(x-1)(x-2)(x+1)<0$　なので



$\therefore\ x<-1,\ 1<x<2$

関数と極限【分数関数のグラフと不等式】　p.81　**練習**

分数関数のグラフと性質

1　分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で，

漸近線は 2 直線 $x=p$，$y=q$ である。

2　定義域は $x \fallingdotseq p$，値域は $y \fallingdotseq q$ である。

$\boxed{1}$ **練習４）** 関数 $y=\dfrac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x-1$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x$　　(3)　$y=-3$

関数と極限【分数関数のグラフと不等式】　p.81　練習

2　**練習５）** 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\dfrac{2}{x+2}=x+3$

(2)　$\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$

3　$x\neq 7$ とする。このとき，不等式 $-x^2-x+20>\dfrac{140}{7-x}$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

【明治大学】

関数と極限【分数関数のグラフと不等式】　p.81　練習

分数関数のグラフと性質

1　分数関数 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは，

$y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で，

漸近線は 2 直線 $x=p$，$y=q$ である。

2　定義域は $x \neq p$，値域は $y \neq q$ である。

1　**練習４）** 関数 $y=\dfrac{3}{x+1}$ のグラフと次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x-1$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}x$　　(3)　$y=-3$

解説

(1)　$\dfrac{3}{x+1}=x-1$ より　　$3=(x-1)(x+1)$

すなわち　　$x^2-4=0$

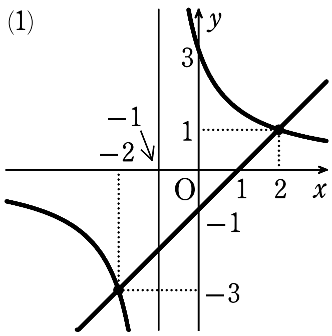
これを解くと　　$x=-2,\ 2$

これが共有点の x 座標である。

$y=x-1$ であるから，求める共有点の座標は

$(-2,\ -3)$，$(2,\ 1)$

(1)



(2)　$\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{1}{2}x$ より　　$6=x(x+1)$

すなわち　　$x^2+x-6=0$

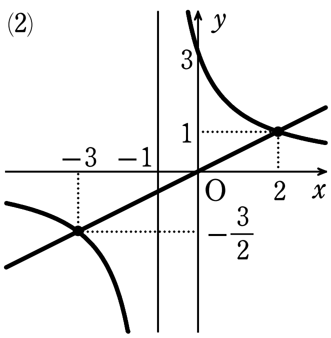
これを解くと　　$x=-3,\ 2$

これが共有点の x 座標である。

$y=\dfrac{1}{2}x$ であるから，求める共有点の座標は

$\left(-3,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$(2,\ 1)$

(2)



(3)　$\dfrac{3}{x+1}=-3$ より　　$3=-3(x+1)$

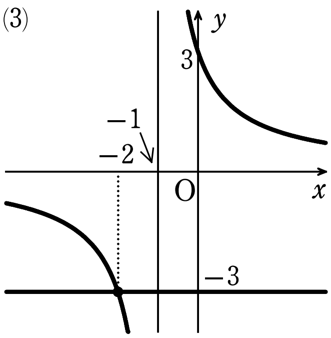
すなわち　$x=-2$

これが共有点の x 座標である。

$y=-3$ であるから，求める共有点の座標は

$(-2,\ -3)$

(3)



関数と極限【分数関数のグラフと不等式】　p.81　練習

2　**練習5）** 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\dfrac{2}{x+2}=x+3$　　　　(2)　$\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$

(解説)

(1)　$\dfrac{2}{x+2}=x+3$ より　　$2=(x+3)(x+2)$

すなわち　　$x^2+5x+4=0$

これを解いて　　$x=-4,\ -1$

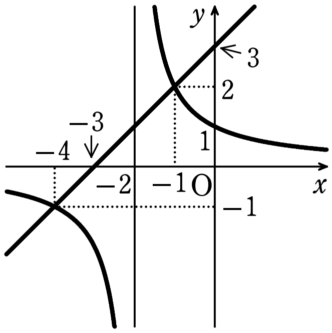
(2)　(1) より，関数 $y=\dfrac{2}{x+2}$ のグラフと直線

$y=x+3$ の共有点の座標は

$(-4,\ -1),\ (-1,\ 2)$

グラフから，不等式 $\dfrac{2}{x+2}\leqq x+3$ の解は

$-4\leqq x<-2,\ -1\leqq x$



3　$x\fallingdotseq 7$ とする。このとき，不等式 $-x^2-x+20>\dfrac{140}{7-x}$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

【明治大学】

(解説)

与えられた不等式から　　$\dfrac{140}{x-7}>x^2+x-20$

$y=\dfrac{140}{x-7}$ ……①，$y=x^2+x-20$ ……② とする。

関数 ① のグラフが放物線 ② の上側にあるような x の範囲を求める。

$\dfrac{140}{x-7}=x^2+x-20$ から

$(x-7)(x^2+x-20)=140$

よって　　$x^3-6x^2-27x=0$

すなわち　$x(x+3)(x-9)=0$

ゆえに　　$x=0,\ -3,\ 9$

したがって，求める x の範囲は，図より　　$-{}^{ア}3<x<{}^{イ}0,\ {}^{ウ}7<x<{}^{エ}9$