

【内容目標】 グラフを活用して方程式・不等式を解こう

応用例題 2) 関数 $y = \sqrt{x+2}$ のグラフと直線 $y = x$ の共有点の座標を求めよ。

【方針】 $\dots \sqrt{x+2} = x$ の両辺を 2 乗した方程式の解は、もとの方程式の解とは限らない。

得られた x の値がもとの方程式を満たすかどうかを調べて、解を決定する。

共有点の x 座標は連立方程式の解と一致する

【解答】 $\sqrt{x+2} = x \dots\dots ①$

の両辺を 2 乗して整理すると

$$x^2 - x - 2 = 0$$

これを解くと $x = -1, 2$

このうち、① を満たすのは $x = 2$ で、

このとき①の両辺の値は 2 である。

よって、求める共有点の座標は

(2, 2)

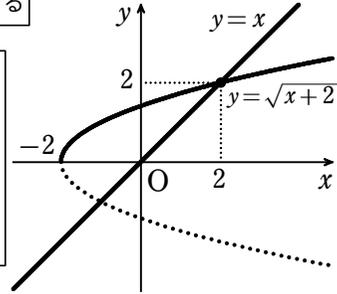
$$A = B \Rightarrow A^2 = B^2$$

は成り立つが

$$A^2 = B^2 \Rightarrow A = B$$

は成り立たないため

確認が必要となる



【別解】 $y = \sqrt{x+2} \geq 0$ なので

①より $x = y \geq 0$ ゆえに $x = 2$ である

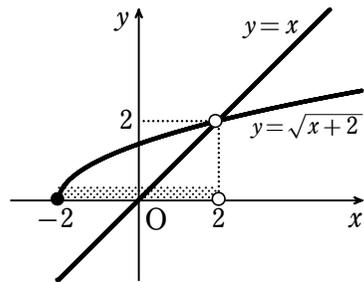
応用例題 2つづき) 不等式 $\sqrt{x+2} > x \dots\dots ②$ を解け。

不等式 $\sqrt{x+2} > x$ の解は、

関数 $y = \sqrt{x+2}$ のグラフが直線 $y = x$ より上側にある x の値の範囲である。

右の図から、不等式 ② の解は

$$-2 \leq x < 2$$



【別解】

$$y = \sqrt{x+2} \dots\dots ①, \quad y = x \dots\dots ②$$

とすると①は定義域 $x+2 \geq 0$ より $x \geq -2$

i) $x < 0$ のとき

$\sqrt{x+2} \geq 0$ であるから

$x < 0 \leq \sqrt{x+2}$ となり

与えられた不等式を満たす

$$\therefore -2 \leq x < 0$$

ii) $x \geq 0$ のとき

$\sqrt{x+2} > x$ の両辺は正になる

よって両辺を 2 乗しても

大小関係は変わらないので

$$x+2 > x^2$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x-2)(x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 2$$

条件より $x \geq 0$ であるから

$$0 \leq x < 2$$

i) ii) より $-2 \leq x < 2$

練習8) 次の2つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2x+2}$, $y = x-3$

(2) $y = -\sqrt{x+1}$, $y = x-1$

練習9) 次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sqrt{x-1} = -x+3$

(2) $\sqrt{x-1} \leq -x+3$

練習8) 次の2つの関数について、グラフの共有点の座標を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2x+2}$, $y = x-3$

(2) $y = -\sqrt{x+1}$, $y = x-1$

解説

(1) $\sqrt{2x+2} = x-3 \dots\dots ①$

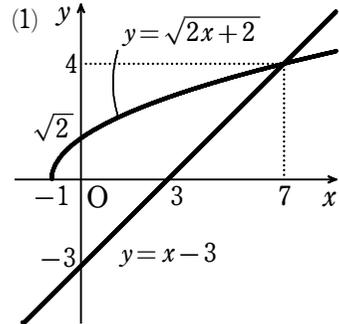
の両辺を2乗して整理すると $x^2 - 8x + 7 = 0$

これを解くと $x = 1, 7$

このうち、①を満たすのは $x = 7$ で、このとき

①の両辺の値は4である。

よって、共有点の座標は $(7, 4)$



(2) $-\sqrt{x+1} = x-1 \dots\dots ①$

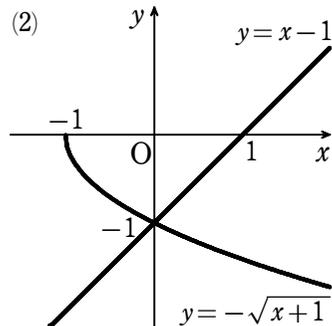
の両辺を2乗して整理すると $x^2 - 3x = 0$

これを解くと $x = 0, 3$

このうち、①を満たすのは $x = 0$ で、このとき

①の両辺の値は-1である。

よって、共有点の座標は $(0, -1)$



練習9) 次の方程式、不等式を解け。

(1) $\sqrt{x-1} = -x+3$

(2) $\sqrt{x-1} \leq -x+3$

解説

(1) $\sqrt{x-1} = -x+3$ の両辺を2乗して整理すると

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

これを解くと $x = 2, 5$

このうち、等式 $\sqrt{x-1} = -x+3$ を満たすのは $x = 2$ である。

よって、方程式の解は $x = 2$

(2) (1)より、関数 $y = \sqrt{x-1}$ のグラフと直線

$y = -x+3$ の共有点の座標は

$$(2, 1)$$

グラフから、不等式 $\sqrt{x-1} \leq -x+3$ の解は

$$1 \leq x \leq 2$$

