関数と極限【逆関数】　p.85～87

【内容目標】逆関数を求められるようになろう！

一般に，関数 $y=f(x)$ が，増加関数または減少関数であるとき，値域内の y の値を定めると，それに対応して x の値がただ１つ定まる。すなわち，x は y の関数である。この関数を $x=g(y)$ で表す。このとき，**変数 y とxを入れ替えて得られる関数 $y=g(x)$ を，もとの関数 $f(x)$ の 逆関数といい，$f^{-1}(x)$ で表す。**

関数とその逆関数では，定義域と値域が入れかわる。

逆関数を求めるための一般的な手順は，次のようになる。

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

1　$y=f(x)$ を x について解き，$x=g(y)$ の形にする。

2　x と y を入れかえて，$y=g(x)$ とする。

もとの関数 $f(x)$と 逆関数 $g(x)$ では，定義域と値域も入れ替わる。（文字を変える）

また，一般に次のことが成り立つ。

関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，
直線 $y=x$ **に関して対称**である。

例題２＋α）次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y=5x-4$

$-5x=-y-4$

$x=\dfrac{1}{5}y+\dfrac{4}{5}$

x と y を入れ替えると

$y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$

(2)　$y=\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+3}{x-2}=\dfrac{3}{x-2}+1$

定義域 $x\neq 2$　値域 $y\neq 1$

$(x-2)y=x+1$　より　$yx-2y=x+1$

$yx-x=2y+1$　　$(y-1)x=2y+1$

$y\neq 1$ なので　$x=\dfrac{2y+1}{y-1}$

x と y を入れ替えると　$y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

（定義域 $x\neq 1$　値域 $y\neq 2$ ）

例３）関数 $y=\sqrt{x}$ の逆関数を求めよ。

定義域　$x\geqq 0$　値域　$y\geqq 0$

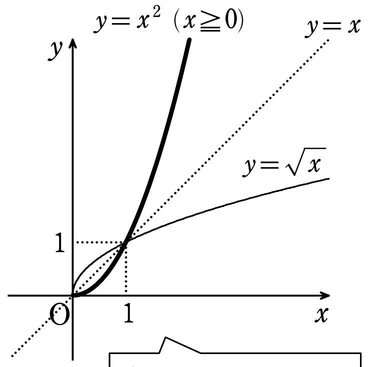
$y=\sqrt{x}$ を x について解く（両辺2 乗）

$x=y^2$　$(y\geqq 0)$

x と y を入れかえて

$y=x^2$　$(x\geqq 0)$

これが $y=\sqrt{x}$ の逆関数である。



グラフがイメージできるとよい

＜注意＞　関数 $y=\sqrt{x}$ では，定義域 $x\geqq 0$ の表示は省略することが多い。

関数と極限【逆関数】　p.85～87

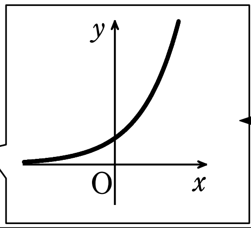
例４） 関数 $y=2^x$ の逆関数を求めよ。

定義域　実数全体

値域　$y>0$（正の実数全体）

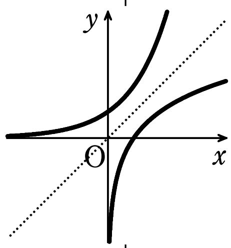
これを x について解くと

$x=\log_2 y$



底^{指数}＝真数　⇔　指数＝$\log_{底}$真数

ただし　底＞0，底≠1，真数＞0

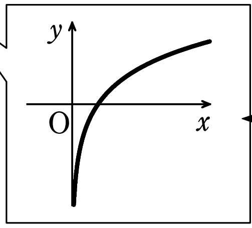


x と y を入れ替えると

$y=\log_2 x$

定義域　$x>0$（正の実数全体）

値域　実数全体



＜注意＞　関数 $y=\log_2 x\ (x>0)$ では，定義域の表示を省略して $y=\log_2 x$ と書くことが多い。

グラフがイメージできるとよい

補題　関数が逆関数をもたない場合もある。

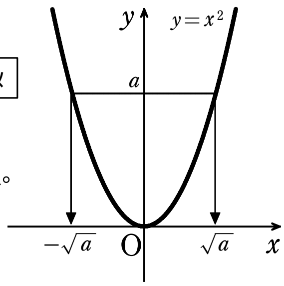
例５） 関数 $y=x^2$ の逆関数

関数なので１対１対応がとれていないとダメ

$y=x^2$ を x について解くと　$x=\pm\sqrt{y}$

この場合，y の値を定めても x の値はただ１つには定まらない。

よって，関数 $y=x^2$ は逆関数をもたない。　終



注意　定義域を制限した関数 $y=x^2\ (x\geqq 0)$ は逆関数をもつ。

その逆関数は $y=\sqrt{x}$ である。

□逆関数の性質

逆関数の定義から，次のことが成り立つ。

> 関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき
>
> $b=f(a)\iff a=f^{-1}(b)$

例６）　関数 $f(x)$ が逆関数をもち，$f(4)=2$ であるとき　$f^{-1}(2)=4$　終

練習１３） $a\neq 0$ とする。関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f(2)=4$，$f^{-1}(1)=-4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答

$f(2)=4$ であるから　$2a+b=4$　……①

$f^{-1}(1)=-4$ のとき $f(-4)=1$ であるから

逆関数の性質

$-4a+b=1$　……②

①，② を解いて

$$\begin{array}{rr} & 2a+b=4 \\ -) & -4a+b=1 \\ \hline & 6a\qquad =3 \end{array}$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$，$b=3$

これは，$a\neq 0$ を満たす。

関数と極限【逆関数】　p.85～87　練習問題

練習１０） 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y=3x-1\ (0 \leqq x \leqq 2)$

(2)　$y=-\sqrt{x}$

(3)　$y=3^x$

(4)　$y=\log_4 x$

練習１１） 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{2x+3}{x-1}$

(2)　$y=\dfrac{-x+2}{x+3}$

関数と極限【逆関数】 p.85～87 **練習問題**

練習１２） 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=x^2+2\ (x \geqq 0)$

(2) $y=-x^2\ (x \leqq 0)$

練習１４） 次の関数のグラフおよびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(1) $y=\sqrt{-x}$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

関数と極限【逆関数】 p.85～87 練習問題

練習１０）次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=3x-1\ (0\leqq x\leqq 2)$　　(2) $y=-\sqrt{x}$

(3) $y=3^x$　　(4) $y=\log_4 x$

(解説)

(1) 与えられた関数の値域は $-1\leqq y\leqq 5$

$y=3x-1$ を x について解くと $x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}\ (-1\leqq y\leqq 5)$

x と y を入れかえて，求める逆関数は $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}\ (-1\leqq x\leqq 5)$

(2) 定義域は $x\geqq 0$ 値域は $y\leqq 0$

$y=-\sqrt{x}$ を x について解くと $x=y^2\ (y\leqq 0)$

x と y を入れかえて，求める逆関数は $y=x^2\ (x\leqq 0)$

(3) 定義域は 実数全体，値域は $y>0$

$y=3^x$ を x について解くと $x=\log_3 y$

x と y を入れかえて，求める逆関数は $y=\log_3 x$

(4) 定義域は $x>0$ ，値域は 実数全体

$y=\log_4 x$ を x について解くと $x=4^y$

x と y を入れかえて，求める逆関数は $y=4^x$

練習１１）次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$　　(2) $y=\dfrac{-x+2}{x+3}$

(解説)

(1) $\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+2$ であるから，関数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ の値域は $y\fallingdotseq 2$ 。

$y(x-1)=2x+3$ より $xy-y=2x+3$ よって $xy-2x=y+3$

$(y-2)x=y+3$ で，$y\fallingdotseq 2$ であるから $x=\dfrac{y+3}{y-2}$

よって，求める逆関数は $y=\dfrac{x+3}{x-2}$

(2) $\dfrac{-x+2}{x+3}=\dfrac{-(x+3)+5}{x+3}=\dfrac{5}{x+3}-1$ であるから，関数 $y=\dfrac{-x+2}{x+3}$ の値域は $y\fallingdotseq -1$

$y(x+3)=-x+2$ より $xy+3y=-x+2$ よって $xy+x=-3y+2$

$(y+1)x=-3y+2$で，$y\fallingdotseq -1$ であるから $x=\dfrac{-3y+2}{y+1}$

よって，求める逆関数は $y=\dfrac{-3x+2}{x+1}$

関数と極限【逆関数】 p.85～87 練習問題

練習１２） 次の関数の逆関数を求めよ。

(1) $y=x^2+2\ (x\geqq 0)$　　　　(2) $y=-x^2\ (x\leqq 0)$

(解説)

(1) $y=x^2+2$ を x について解くと　　$x=\pm\sqrt{y-2}$

$x\geqq 0$ であるから　　$x=\sqrt{y-2}$

よって，求める逆関数は　　$y=\sqrt{x-2}$

(2) $y=-x^2$ を x について解くと　　$x=\pm\sqrt{-y}$

$x\leqq 0$ であるから　　$x=-\sqrt{-y}$

よって，求める逆関数は　　$y=-\sqrt{-x}$

練習１４） 次の関数のグラフおよびその逆関数のグラフを同じ図中にかけ。

(1) $y=\sqrt{-x}$　　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

(解説)

(1) 関数 $y=\sqrt{-x}$ の値域は　　$y\geqq 0$

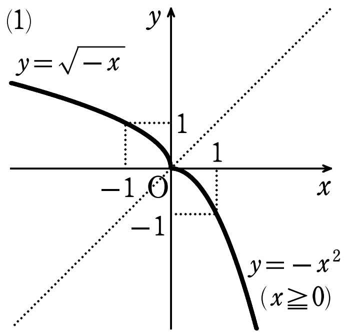
$y=\sqrt{-x}$ を x について解くと

$$x=-y^2\quad (y\geqq 0)$$

よって，与えられた関数の逆関数は

$$y=-x^2\quad (x\geqq 0)$$

グラフは，[図] のようになる。



(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ を x について解くと

$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^y$$

よって，与えられた関数の逆関数は

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

グラフは，[図] のようになる。