

【内容目標】 合成関数の考え方を理解しよう！

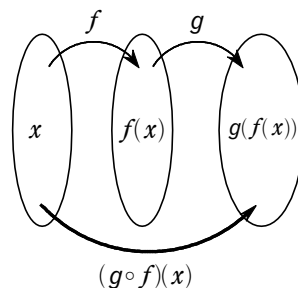
一般に、2つの関数 $y=f(x)$, $z=g(y)$ があり、 $f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとき、 $g(y)$ に $y=f(x)$ を代入すると、新しい関数 $g(f(x))$ が考えられる。

この関数を、 $f(x)$ と $g(y)$ の **合成関数** という。

$g(f(x))$ を $(g \circ f)(x)$ とも書く。

注意 一般に、 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は同じ関数ではない。

($g \circ f = f \circ g$ が成り立つとは限らない)



例題 3) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2^x$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $(g \circ f)(x)$

(2) $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+1) \\ &= 2^{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2^x) \\ &= 2^x + 1 \end{aligned}$$

※ このように、一般に合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は一致しない。

□ 合成関数と逆関数

一般に、関数 $y=f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつとき次の式が成り立つ

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

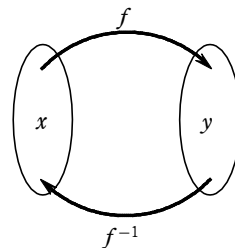
$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

例) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ であるとき、

合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2^x) \\ &= \log_2 2^x \\ &= x \cdot \log_2 2 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\log_2 x) \\ &= 2^{\log_2 x} \\ &= x \end{aligned}$$



$y = 2^{\log_2 x}$
 両辺に底 2 の対数をとると
 $\log_2 y = \log_2 2^{\log_2 x}$
 $\log_2 y = \log_2 x \cdot \log_2 2$
 $\log_2 y = \log_2 x$
 $\therefore y = x = 2^{\log_2 x}$

※ このように、逆関数の関係のとき

合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は一致する。

関数と極限【合成関数】 p.88~90 練習問題

□1 練習15) $f(x) = x^2$, $g(x) = \log_2(x+1)$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $(g \circ f)(x)$

(2) $(f \circ g)(x)$

□2 練習16) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ ($x \geq 0$) について、 $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ がそれぞれの定義域において $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$ となることを確かめよ。

関数と極限【合成関数】 p.88~90 練習問題

③ a, b, c を定数とする。分数関数 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ は $f(-1) = 1, f(0) = 4, f(1) = 5$ を満たしている。

(1) $a = \overset{ア}{\square}, b = \overset{イ}{\square}, c = \overset{ウ}{\square}$ である。

(2) $f^{-1}(x) = \frac{\overset{エ}{\square} - \overset{オ}{\square}x}{x - \overset{カ}{\square}}$ である。

(3) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\overset{キ}{\square}x + \overset{ク}{\square}}{\overset{ケ}{\square}x + \overset{コ}{\square}}$ である。

【金沢工業大】

1 練習 15) $f(x) = x^2$, $g(x) = \log_2(x+1)$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $(g \circ f)(x)$

(2) $(f \circ g)(x)$

解説

(1) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \log_2(x^2 + 1)$

(2) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2(x+1)) = \{\log_2(x+1)\}^2$

2 練習 16) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ ($x \geq 0$) について、 $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ がそれぞれの定義域において $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$ となることを確かめよ。

解説

$y = f(x)$ の定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \geq 0$ 。

$y = g(x)$ の定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \geq 0$ 。

$f(x)$ の値域は $g(x)$ の定義域と一致するので $g(f(x))$ は演算可能,

g の値域は f の定義域と一致するので $f(g(x))$ は演算可能,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x \quad (\because x \geq 0)$$

また

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 = x$$

③ a, b, c を定数とする。分数関数 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ は $f(-1) = 1$, $f(0) = 4$, $f(1) = 5$ を満たしている。

(1) $a = \overset{\text{ア}}{\square}$, $b = \overset{\text{イ}}{\square}$, $c = \overset{\text{ウ}}{\square}$ である。

(2) $f^{-1}(x) = \frac{\overset{\text{エ}}{\square} - \overset{\text{オ}}{\square}x}{x - \overset{\text{カ}}{\square}}$ である。

(3) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\overset{\text{キ}}{\square}x + \overset{\text{ク}}{\square}}{\overset{\text{ケ}}{\square}x + \overset{\text{コ}}{\square}}$ である。

【金沢工業大】

解説

(1) $f(-1) = \frac{-a+b}{-1+c}$, $f(0) = \frac{b}{c}$, $f(1) = \frac{a+b}{1+c}$ であるから

$$\frac{-a+b}{-1+c} = 1, \quad \frac{b}{c} = 4, \quad \frac{a+b}{1+c} = 5 \quad (\text{ただし } c \neq \pm 1, 0)$$

それぞれ分母を払って整理すると $a - b + c = 1$, $b = 4c$, $a + b - 5c = 5$

これらを連立させて解くと $a = \overset{\text{ア}}{7}$, $b = \overset{\text{イ}}{8}$, $c = \overset{\text{ウ}}{2}$ ($c \neq \pm 1, 0$ を満たす)

(2) (1) から $f(x) = \frac{7x+8}{x+2}$

$y = \frac{7x+8}{x+2}$ …… ① とすると, $y = -\frac{6}{x+2} + 7$ であるから, $y \neq 7$ である。

① の分母を払うと $y(x+2) = 7x+8$

変形すると $(y-7)x = 8-2y$ であり, $y \neq 7$ であるから $x = \frac{8-2y}{y-7}$

x と y を入れ替えると $y = \frac{8-2x}{x-7}$ ゆえに $f^{-1}(x) = \frac{\overset{\text{エ}}{8} - \overset{\text{オ}}{2}x}{x - \overset{\text{カ}}{7}}$

(3) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{7 \cdot \frac{7x+8}{x+2} + 8}{\frac{7x+8}{x+2} + 2} = \frac{\overset{\text{キ}}{19}x + \overset{\text{ク}}{24}}{\overset{\text{ケ}}{3}x + \overset{\text{コ}}{4}}$