関数と極限【数列の極限】　p.94～96

【内容目標】数列の収束・発散の考え方を理解しよう！

数を一列に並べたものを数列といい，数列における各数を項という。数列の項は，最初の項を初項，n 番目の項を第 n 項という。以下では，項が限りなく続く **無限数列** を考える。

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくするとき，a_n がある値 α に限りなく近づくならば，$\{a_n\}$ は α に **収束** する，または $\{a_n\}$ の極限 は α であるという。また，値 α を $\{a_n\}$ の **極限値** ともいう。

このことを，次のように書き表す*。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha}$$

＊ 記号 ∞ は「無限大」と読む。∞ は，値すなわち数を表すものではない。（極限**値**と言わない）

□収束しない数列

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は 発散 するという。発散する数列には，次のように 3 つの場合がある。

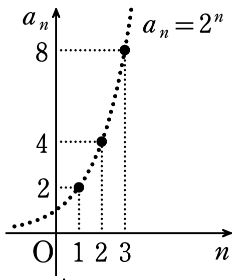
[1] 数列 2，4，8，……，2^n，……

では，n を限りなく大きくすると，2^n の値は，<u>限りなく大きくなる</u>。

[1] のような場合，数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散** する，

または $\{a_n\}$ の **極限は正の無限大** であるといい，次のように書き表す。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty}$$



[2] 数列 -3，-6，-9，……，$-3n$，……

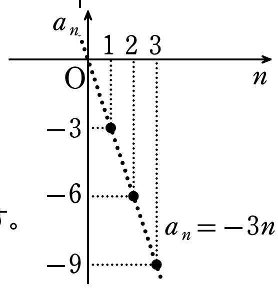
では，n を限りなく大きくすると，$-3n$ の値は

<u>負で，その絶対値は限りなく大きくなる</u>。

[2] のような場合，数列 $\{a_n\}$ は **負の無限大に発散** する，

または $\{a_n\}$ の **極限は負の無限大** であるといい，次のように書き表す。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty}$$



[1]，[2] の数列については，次のように書き表される。

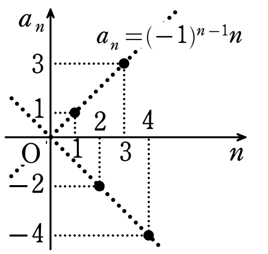
$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty}(-3n) = -\infty$$

注意 極限が ∞ または $-\infty$ の場合，これらを数列の<u>極限値</u>とはいわない。

[3] 数列 1，-2，3，……，$(-1)^{n-1}n$，……

では，n を限りなく大きくすると，$(-1)^{n-1}n$ の値は収束しない。

発散する数列が，正の無限大に発散もせず，負の無限大に発散もしない場合，その数列は **振動** するという。



関数と極限【数列の極限】　p.94～96

数列 $\{a_n\}$ の収束，発散についてまとめると，次のようになる。

○数列の収束・発散

収束	値 α に収束	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	……	極限は α
発散（収束しない）	正の無限大に発散	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	……	極限は ∞
	負の無限大に発散	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	……	極限は $-\infty$
	振動		……	極限は ない

例 1 ＋α）

0に近づく

(1)　数列 1.1，1.01，1.001，……，$1\boxed{+(0.1)^n}$，……　は，1 に収束する。

すなわち，この数列の極限値は 1 である。

0に近づく

(2)　数列 -0.1，0.01，-0.001，……，$\boxed{(-0.1)^n}$，……

は，各項の符号が負，正，負，…… と交互に変わりながら 0 に収束する。

すなわち，この数列の極限値は 0 である。

0に近づく

(3)　$\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，……，$\boxed{\dfrac{1}{n}}$，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

0に近づく

(4)　1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{8}$，……，$\boxed{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

大きくなり続ける

(5)　$\dfrac{1+1}{2}$，$\dfrac{2+1}{2}$，$\dfrac{3+1}{2}$，……，$\dfrac{n+1}{2}$，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty$

小さくなり続ける

(6)　-2^0，-2^1，-2^2，……，-2^{n-1}，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-2^{n-1})=-\infty$

+3されていく⇒大きくなり続ける

(7)　-5，-2，1，……，$3n-8$，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n-8)=\infty$

正の無限大に発散する

引く値が 0 に近づく⇒2 に近づく

(8)　1，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{3}$，……，$2-\boxed{\dfrac{1}{n}}$，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$

小さくなり続ける

(9)　-1，-4，-9，……，$-n^2$，……

なので　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$

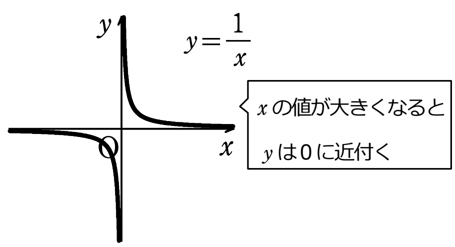
負の無限大に発散する

(10)　-3，9，-27，……，$(-3)^n$，……

なので　発散（振動）する

※ グラフをイメージすると良い

⇒　関数の極限につながる



関数と極限【数列の極限】　p.94～96　練習問題

練習１） 次の数列の極限値をいえ。

(1)　$\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ……, $\frac{n+1}{n}$, ……

(2)　-1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, ……, $\frac{(-1)^n}{n}$, ……

(3)　$\cos\pi$, $\cos 3\pi$, $\cos 5\pi$, ……, $\cos(2n-1)\pi$, ……

練習２） 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$2n$　　(2)　$-\frac{1}{n}$　　(3)　$-n^2$　　(4)　$1+(-1)^n$

関数と極限【数列の極限】　p.94～96　練習問題

練習１） 次の数列の極限値をいえ。

(1)　$\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, ……, $\dfrac{n+1}{n}$, ……

(2)　-1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{3}$, ……, $\dfrac{(-1)^n}{n}$, ……

(3)　$\cos\pi$, $\cos 3\pi$, $\cos 5\pi$, ……, $\cos(2n-1)\pi$, ……

(解説)

(1)　数列 $1+1$, $1+\dfrac{1}{2}$, $1+\dfrac{1}{3}$, ……, $1+\dfrac{1}{n}$, …… は 1 に収束する。

すなわち，この数列の極限値は　1

(2)　数列 -1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{3}$, ……, $\dfrac{(-1)^n}{n}$, …… は，各項の符号が負，正，負，…… と交互に変わりながら 0 に収束する。

すなわち，この数列の極限値は　0

(3)　n が自然数のとき　　$\cos(2n-1)\pi=-1$

したがって，数列 $\cos\pi$, $\cos 3\pi$, $\cos 5\pi$, ……, $\cos(2n-1)\pi$, …… は -1 が無限に続く数列であるから -1 に収束する。

すなわち，この数列の極限値は　-1

練習２） 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$2n$　　(2)　$-\dfrac{1}{n}$　　(3)　$-n^2$　　(4)　$1+(-1)^n$

(解説)

(1)　n を限りなく大きくすると，$2n$ の値は限りなく大きくなる。

したがって，この数列の極限は　∞

(2)　n を限りなく大きくすると，$-\dfrac{1}{n}$ は 0 に限りなく近づく。

したがって，この数列の極限は　0

(3)　n を限りなく大きくすると，$-n^2$ の値は負で，その絶対値は限りなく大きくなる。

したがって，この数列の極限は　$-\infty$

(4)　この数列は 0 と 2 が交互に現れ，n を限りなく大きくするとき，$1+(-1)^n$ の値は収束しない。したがって，この数列の極限は　ない（発散（振動））