関数と極限【極限値と四則】　p.97～98

【内容目標】数列の収束・発散の考え方を理解しよう！

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が**<u>ともに収束するとき</u>**，次のことが成り立つ。

数列の極限の性質 (1)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ とする。 1　$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$　ただし，k は定数　　2　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$ 3　$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$　　4　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　ただし，$\beta\fallingdotseq 0$

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ であるとき $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$，

$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$ は明らかである。しかし，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ と $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ についてはいろいろな場合がある（このようなものを**不定形**という）。よって極限が $\infty-\infty$ や $\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\times\infty$，$\dfrac{0}{0}$ などでは不定形でない形に式変形する必要がある。なお，<u>∞同士や∞と他の数との演算は定義されていないので答案にこのような式を書くのは注意が必要である。</u>

■不定形を解消する方法

◇整式や分数式で表される数列なら…

$\infty-\infty$ となる場合　………　最高次の項でくくれ！

$\dfrac{\infty}{\infty}$ となる場合　………　分母の最高次の項で分母・分子を割れ！

◇無理式を含む数列なら…

$\dfrac{\infty}{\infty}$ となる場合　………　分母の最高次の項で分母・分子を割れ！

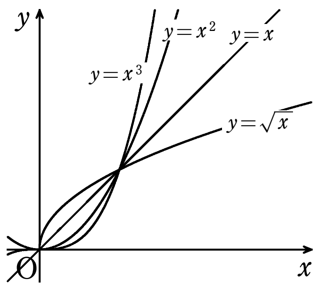
$\infty-\infty$ となる場合　………　$\sqrt{○}-\sqrt{△}$ の形に注目し，分子や分母を有理化せよ！

■ ∞に発散する速さの違いについて～知っていると答えの予想ができる

○一般に、正の無限大に発散する $n^{●}$ は，次数●が大きいほど速く正の無限大に発散していく

○一般に　（ n 次関数）＜＜（指数関数）＜＜（階乗関数）の速さになる

例）$\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$，n，n^2，n^3



$n-n^3\to-\infty$
遅　速

$\dfrac{2n^2-3n}{n^2+1}$ 同じ $\to 2$

と予想できる

例）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}$ や $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ などは「はさみうちの原理」を用いて解く必要があるが、

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=0$　（n ← 遅，3^n ← 速）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$　（2^n ← 遅，$n!$ ← 速）と予想できる

関数と極限【極限値と四則】　p.97～98

例２） $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -3$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(3a_n + b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot 2 + (-3) = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - 2) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n + 4}{a_n - 3} = \frac{\lim_{n\to\infty}(b_n + 4)}{\lim_{n\to\infty}(a_n - 3)} = \frac{-3+4}{2-3} = -1$$

例）

(1) $$\lim_{n\to\infty}(n^2 - 3n) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right) = \infty$$

$\infty - \infty$

← $\lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{n^2} \times \left(1 - \underset{0}{\frac{3}{n}}\right)$ なので $\infty \times 1$

(2) $$\lim_{n\to\infty}(n^2 - 4n^3) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{n} - 4\right) = -\infty$$

$\infty - \infty$

← $\lim_{n\to\infty} \overset{\infty}{n^3} \times \left(\underset{0}{\frac{1}{n}} - 4\right)$ なので $\infty \times (-4)$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2 + \underset{0}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

← 分母が 0 以外の値に収束するように

分母と分子を分母の最高次 n で割る。

$\frac{\infty}{\infty}$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}}{1 - \underset{0}{\frac{2}{n^2}}} = 0$$

← 分母と分子を分母の最高次 n^2 で割る。

例題１）　次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$$

$\infty - \infty$

解答　$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

分子の有理化

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}$$

← 分母と分子を

分母の最高次 n で割る。

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1 + \underset{0}{\frac{1}{n}}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1}$

関数と極限【極限値と四則】　p.97～98　**練習問題**

$\boxed{1}$ **練習3）** $\lim_{n\to\infty} a_n=1$，$\lim_{n\to\infty} b_n=-2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$　(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+5}{2a_n-1}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$

$\boxed{2}$ **練習4）** 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-n^2)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(n-3n^2)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}$　(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n^2+3}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n+1}$

関数と極限【極限値と四則】　p.97～98　**練習問題**

3　**練習５）** 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

4　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}$ を求めよ。【東京電機大】

関数と極限【極限値と四則】　p.97～98　練習問題

□1 **練習3）** $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + 2b_n)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1)$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$　(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n + 5}{2a_n - 1}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$

(解説)

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 1-(-2) = 3$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3a_n + 2b_n) = 3\lim_{n\to\infty} a_n + 2\lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot 1 + 2\cdot(-2) = -1$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 1) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} 1 = 1-1 = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = 1\cdot(-2) = -2$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n + 5}{2a_n - 1} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(b_n + 5)}{\lim_{n\to\infty}(2a_n - 1)} = \dfrac{-2+5}{2\cdot 1 - 1} = 3$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)}{\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)} = \dfrac{1-(-2)}{1+(-2)} = -3$

□2 **練習4）** 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3 - n^2)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(n - 3n^2)$　(3) $\lim_{n\to\infty}(2n - n^3)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}$　(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+3}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n}{2n+1}$

(解説)

(1) $\lim_{n\to\infty}(2n^3 - n^2) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = \infty$　(2) $\lim_{n\to\infty}(n - 3n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n} - 3\right) = -\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(2n - n^3) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(\dfrac{2}{n^2} - 1\right) = -\infty$　(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3-\dfrac{2}{n}} = \dfrac{2}{3}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}} = 0$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{2+\dfrac{1}{n}} = \infty$

3 **練習５）** 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$

(解説)

(1) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-n)-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=-\frac{1}{2}$$

4 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}$ を求めよ。【東京電機大】

(解説)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}$$
$$=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\left\{(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right\}}$$

$(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}$

を分母分子にかける

$$=\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\left\{(n+1)^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right\}\left\{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right\}}$$
$$=\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}\{(n+1)-n\}}=\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}+1$$
$$=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}+1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}+1$$

したがって　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right\}$$
$$=1+1+1$$
$$=3$$