関数と極限【数列の極限と大小関係】　p.99

【内容目標】「追い越し禁止」と「はさみうちの原理」の考え方を理解しよう！

数列の極限の性質 (2)　　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

5　**「追い越し禁止」**

すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば　$\alpha \leqq \beta$

補足　性質 5 において，常に $a_n < b_n$ でも，$\alpha = \beta$ の場合がある。たとえば，

$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ では，$a_n < b_n$ であるが，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ である。

また，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき，すべての n について $a_n \leqq b_n$ ならば　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

6　**「はさみうちの原理」**

すべての n について $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $\alpha = \beta$ ならば　$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$

応用例題 1 ＋α） 次の極限を求めよ。ただし，θ は定数とする。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3}$　　(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}$

解説

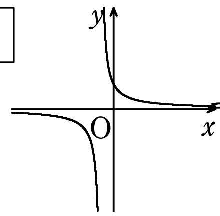
(1) $-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ であるから

$\because\ 2n+1>0$

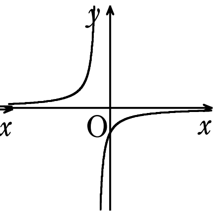
$$-\frac{1}{2n+1} \leqq \frac{(-1)^n}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n+1}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=0$$



$y=\dfrac{1}{2x+1}$



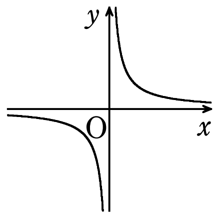
$y=-\dfrac{1}{2x+1}$

(2) $-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{3} \leqq 1$ であるから

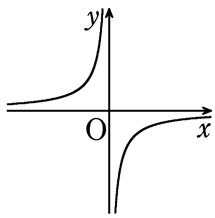
$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3} \leqq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}=0$$



$y=\dfrac{1}{x}$



$y=-\dfrac{1}{x}$

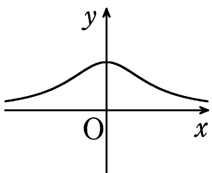
(3) $0 \leqq \cos^2 n\theta \leqq 1$ であるから

$\because\ n^2+1>0$

$$0 \leqq \frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1} \leqq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}=0$$



$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

関数と極限【数列の極限と大小関係】 p.99 練習問題

1 **練習6）** θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$$

2 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n は n 桁の正の整数とする。このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10}a_n}{n}$ を調べよ。

【広島市立大】

関数と極限【数列の極限と大小関係】 p.99 **練習問題**

[1] **練習６）** θ を定数とするとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}$$

（解説）

$-1\leqq\cos\frac{n\theta}{6}\leqq 1$ より　　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\theta}{6}=0$$

[2] 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n は n 桁の正の整数とする。このとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10}a_n}{n}$ を調べよ。

【広島市立大】

（解説）

a_n は n 桁の整数であるから　　$10^{n-1}\leqq a_n<10^n$

各辺の常用対数をとると

$$\log_{10}10^{n-1}\leqq\log_{10}a_n<\log_{10}10^n$$

$$n-1\leqq\log_{10}a_n<n$$

$n>0$ より両辺を n で割ると

$$1-\frac{1}{n}\leqq\frac{\log_{10}a_n}{n}<1$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ であるから，はさみうちの原理により　　$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10}a_n}{n}=1$