積分法とその応用【不定積分とその基本公式】 p.202～205

□不定積分

基本数Ⅱと同じ

数学Ⅱで学んだように，x で微分すると $f(x)$ になる関数があれば，その関数を $f(x)$ の **原始関数** という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき，すなわち $F'(x)=f(x)$ のとき，任意の定数 C に対して $\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$ が成り立つから，$F(x)+C$ も $f(x)$ の原始関数である。

また，$F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数ならば，$G'(x)=F'(x)$となるから，$G(x)=F(x)+C$ を満たす定数 C が存在する。

以上からわかるように，関数 $f(x)$ の原始関数が存在するならば，それは無数にある。その 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の原始関数全体は，次の形に書き表される。

$$F(x)+C \qquad C \text{ は任意の定数}$$

この表示を $f(x)$ の **不定積分** といい*，$\int f(x)dx$ で表す。

*不定積分と原始関数を区別せずに同じ意味で用いることもある

$$\begin{tikzcd} F(x)+C \arrow[r, bend left, "\text{微分する}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{積分する}"] \end{tikzcd}$$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を **積分する** といい，上の定数 C を **積分定数** という。また，$f(x)$ を **被積分関数** といい，x を 積分変数 という。

$f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad \text{ただし，}C\text{ は積分定数}$$

注意 今後，「C は積分定数」の断りを省略する。

関数の不定積分を求めるには，導関数の公式が逆に利用される。

実数 α について $(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha} \Rightarrow \int (x^{\alpha+1})'dx=(\alpha+1)\int x^{\alpha}dx$

$$x^{\alpha+1}+C_1=(\alpha+1)\int x^{\alpha}dx$$

$$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C=\int x^{\alpha}dx$$

$\dfrac{C_1}{\alpha+1}=C$ とする

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x} \Rightarrow \int(\log|x|)'dx=\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log|x|+C=\int\frac{1}{x}dx$$

注意 $\displaystyle\int\frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int\frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある

x^{α} の不定積分

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \qquad \text{ただし，}\alpha\neq-1$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$$

真数条件を満たすように $|x|$ とする

$$\frac{1}{\bigcirc+1}x^{\bigcirc+1}$$

①1加える

②分母に出す

積分法とその応用【不定積分とその基本公式】　p.202～205

□不定積分の基本性質

関数の定数倍および和，差の不定積分

1　$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　　ただし，k は定数

2　$\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3　$\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

注意　上のように書いた不定積分についての等式では，両辺の積分定数の違いは無視することにする。

注意　不定積分を求める計算では，記号 $\int$ が取れた段階で積分定数 C をつければよい。

また，$\int 1dx$ は 1 を省略して $\int dx$ と書くことがある。

参考　積分変数として，x 以外の文字を用いることもある。　$\int$(● の関数)d●

例） 次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int x^4 dx$　　(2)　$\int \frac{dy}{y^5}$　　(3)　$\int x^{\frac{1}{3}}dx$

$\int \frac{dx}{y^5}$ だと $\frac{1}{y^5}\int dx = \frac{1}{y^5}x + C$

(4)　$\int \sqrt[4]{t}\,dt$　　(5)　$\int x\sqrt{x}\,dx$　　(6)　$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(解説)

C は積分定数とする。

(1)　$\int x^4 dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

(2)　$\int \frac{dy}{y^5} = \int y^{-5}dy = \frac{1}{-5+1}y^{-5+1} + C = -\frac{1}{4}y^{-4} + C = -\frac{1}{4y^4} + C$

(3)　$\int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

①１加える　$\frac{1}{\bigcirc+1}x^{\bigcirc+1}$　②分母に出す

(4)　$\int \sqrt[4]{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}t^{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{5}t\sqrt[4]{t} + C$

(5)　$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

(6)　$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

積分法とその応用【不定積分とその基本公式】 p.202～205

例） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^2dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{2x-3x^2}{\sqrt{x}}dx$　　(4) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx$

解説

(1) $$\int\frac{(x-2)(x^2-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^3}dx$$
$$=\int\left(1-\boxed{\frac{2}{x}}-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$$
$$=\int dx-2\int\frac{dx}{x}-3\int x^{-2}dx+6\int x^{-3}dx$$
$$=x-2\log|x|+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+C$$

分数式は整式にして
単項式ごとにみる

$x^{-1}=\frac{1}{x}$ だけは
$\log|x|$ への流れ

略しても良い

(2) $$\int\left(3x^2-\frac{1}{x}\right)^2dx=\int\left(9x^4-6x+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=9\int x^4dx-6\int xdx+\int x^{-2}dx$$
略しても良い
$$=\frac{9}{5}x^5-3x^2-\frac{1}{x}+C$$

(3) $$\int\frac{2x-3x^2}{\sqrt{x}}dx=\int\left(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$
$$=2\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^{\frac{3}{2}}dx$$
略しても良い
$$=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$$
$$=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}+C$$

(4) $$\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx=\int\frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x}dx$$
$$=\int\left(\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\boxed{\frac{1}{x}}\right)dx$$
$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int\frac{dx}{x}$$
略しても良い
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+6x^{\frac{1}{2}}+\log|x|+C$$

関数 $\dfrac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}$ において $\sqrt{x}$ と分母 x より $x>0$ であるから
$$\int\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+3x+6\sqrt{x}+\log x+C$$

絶対値の中身の
正負が決まるケース

積分法とその応用【不定積分とその基本公式】 p.202～205

□三角関数，指数関数の不定積分

微分にて次の公式を学んだ。ただし，a は 1 でない正の定数とする。

$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(e^x)'=e^x$，$(a^x)'=a^x\log a$

これらから，次の公式が得られる。

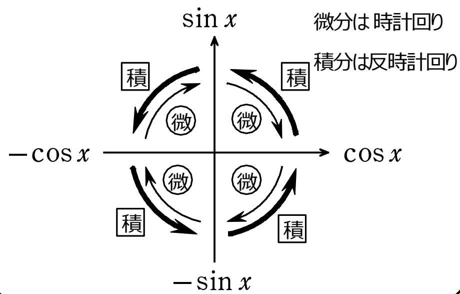
$\int \tan x\,dx$ は のちほど

三角関数，指数関数の不定積分

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C,\qquad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$$



例３＋α）

(1) $\displaystyle\int(2\sin x+3\cos x)dx=2\int \sin x\,dx+3\int \cos x\,dx$

$=-2\cos x+3\sin x+C$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\tan x-x+C$

$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

より $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

(3) $\displaystyle\int \frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx=\int\left(2\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$=2\sin x-\tan x+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta-1}=-\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$=-\tan\theta+C$

(4) $\displaystyle\int(2-\tan\theta)\cos\theta\,d\theta=\int(2\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$=2\sin\theta+\cos\theta+C$

(4) $\displaystyle\int(3e^x-2^x)dx=3\int e^x dx-\int 2^x dx$

$=3e^x-\dfrac{2^x}{\log 2}+C$ 終

練習１） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$　　(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx$　　(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

練習２） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy$　　(4) $\displaystyle\int \left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2 dt$

練習３） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(\cos x-2\sin x)dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^2 x}$ (4) $\displaystyle\int 5^x dx$ (5) $\displaystyle\int(3^x-2e^x)dx$

練習） 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+x-6}dx$ を求めよ。

練習） 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^2}{2-x}dx$ を求めよ。

練習１） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3}$　(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}dx$　(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $$\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$$

(2) $$\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$$

(3) $$\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$$

(4) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$$

練習２） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy$　(4) $\displaystyle\int\left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2dt$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $$\int\frac{x^2-4x+1}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\log|x|+\frac{4}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$$

(2) $$\int\frac{x+2}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C$$

(3) $$\int\frac{(\sqrt{y}-1)^2}{y}dy=\int\frac{y-2\sqrt{y}+1}{y}dy=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{y}}+\frac{1}{y}\right)dy$$
$$=y-4\sqrt{y}+\log y+C$$

(4) $$\int\left(3t^2-\frac{1}{t}\right)^2dt=\int\left(9t^4-6t+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{9}{5}t^5-3t^2-\frac{1}{t}+C$$

練習３） 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(\cos x-2\sin x)dx$　　(2) $\int\frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\int\frac{dx}{\tan^2 x}$　　(4) $\int 5^x dx$　　(5) $\int(3^x-2e^x)dx$

(解説)

C は積分定数とする。

(1) $\int(\cos x-2\sin x)dx=\sin x+2\cos x+C$

(2) $\int\frac{2\cos^3 x-1}{\cos^2 x}dx=\int\left(2\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=2\sin x-\tan x+C$

(3) $\int\frac{dx}{\tan^2 x}=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\frac{1}{\tan x}-x+C$

(4) $\int 5^x dx=\frac{5^x}{\log 5}+C$　　(5) $\int(3^x-2e^x)dx=\frac{3^x}{\log 3}-2e^x+C$

練習） 不定積分 $\int\frac{x}{x^2+x-6}dx$ を求めよ。

(解説)

$\frac{x}{x^2+x-6}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-2}$ とする。このとき　$x=a(x-2)+b(x+3)$

すなわち　$x=(a+b)x-2a+3b$

これが x についての恒等式であるための条件は　$a+b=1$，$-2a+3b=0$

これを解いて　$a=\frac{3}{5}$，$b=\frac{2}{5}$

よって
$$\int\frac{x}{x^2+x-6}dx=\frac{1}{5}\int\left(\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{5}(3\log|x+3|+2\log|x-2|)+C$$
$$=\frac{1}{5}\log|x+3|^3(x-2)^2+C$$ (C は積分定数)

練習） 不定積分 $\int\frac{x^2}{2-x}dx$ を求めよ。

(解説)

$\frac{x^2}{2-x}=-x-2+\frac{4}{2-x}$ であるから

$$\int\frac{x^2}{2-x}dx=\int\left(-x-2+\frac{4}{2-x}\right)dx=-\frac{x^2}{2}-2x-4\log|2-x|+C$$ (C は積分定数)